1.1 ESPAIS VECTORIALS

1.1.1 CONCEPTE

magnitudes escalares : un único valor

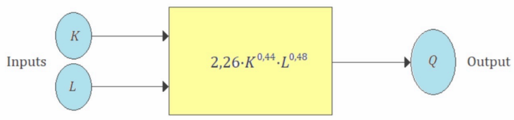
magnitudes vectores : mas de un valor

Producción de Cobb-Douglas

$Q = 2'26 \cdot K^{0,44} \cdot L^{0,48}$

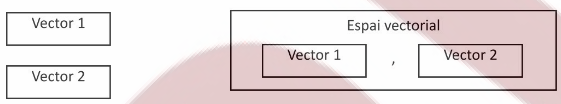
Q → cantidad producida; K → capital; L → Trabajo.

Aquesta funció relaciona la quantitat produïda(Q) amb els factors que la componen (K) i (L) que corresponen a factors de producció de capital i de treball respectivament.



$\Rightarrow Q(K,L)$

Un espai vectorial està format bàsicament per un conjunt de vectors:



Ejemplo: $\mathbb{R}^2$

$\underbrace{(x_1, x_2)}_{\in \mathbb{R}^2} + \underbrace{(y_1, y_2)}_{\in \mathbb{R}^2} = \underbrace{(x_1 + y_1, x_2 + y_2)}_{\in \mathbb{R}^2}$

La **suma interna de vectors**, consisteix en sumar dos vectors amb el **mateix nombre d'elements** de tal manera que es sumen entre ells els elements situats en la mateixa posició de cadascun dels vectors: $\vec{x} + \vec{y} = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$

El **producte extern de vectors** consisteix en multiplicar un mateix escalar/nombre per cadascun dels elements dins d'un vector:

$$\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n), \text{ per a tot } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$\underbrace{\lambda(x_1, x_2)}_{\in \mathbb{R}^2} = \underbrace{(\lambda x_1, \lambda x_2)}_{\in \mathbb{R}^2}$

El **vector nul** és aquell vector el qual tots els seus elements són el nombre 0: $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$

El **vector oposat** a un altre vector correspon a canviar de signe tots els elements del vector original:

$\vec{x}$ opuesto sería $-\vec{x}$

$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$

També hem de tenir en compte les següents propietats d'un espai vectorial:

- $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$. En particular: $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.
- $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0} \xrightarrow{\text{implica}} \lambda = 0$ ó $\vec{x} = \vec{0}$.
- $-(\lambda \cdot \vec{x}) = (-\lambda) \cdot \vec{x}$.
- $\vec{x} = \vec{y} \xleftrightarrow{\text{Equivalent}} \vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$. → $\vec{u} = (1,2)$ $\vec{v} = (1,2)$

$\vec{u} - \vec{v} = (1,2) - (1,2) = (0,0) \in \mathbb{R}^2$

1.1.2 COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORS

Un vector (V_1) es pot considerar **combinació lineal** de dos altres vectors(V_2 i V_3) si aquest pot estar format per per la suma de cadascun d'ells multiplicat per un escalar (mirar esquema):

$$\boxed{V_1 = k_1 \cdot V_2 + k_2 \cdot V_3}$$

2 nombres qualsevol

$\underbrace{(1,3)}_{\vec{u}_1} = \underbrace{1}_{k_1} \cdot \underbrace{(1,0)}_{\vec{u}_2} + \underbrace{3}_{k_2} \cdot \underbrace{(0,1)}_{\vec{u}_3}$

el vector $(1,3)$ es c.l de $(1,0)$ y $(0,1)$

Exercici 1:

Prova si els vectors (-1,9,4) i (7,3,4) són combinació lineal dels vectors (1,2,0) i (-4,3,4).

Si fueran c.l.:

$(-1,9,4) = a\cdot(1,2,0) + b\cdot(-4,3,4)$

$\left.\begin{array}{l} -1 = a - 4b \\ 9 = 2a + 3b \\ 4 = 0 + 4b \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{b=1}$

$9 = 2a + 3$

$6 = 2a \quad \underline{a = 3}$

$-1 = 3 - 4\cdot 1$ ✓ Sí que és c.l.

$(-1,9,4) = 3(1,2,0) + 1\cdot(-4,3,4)$

Si fuera combinación lineal:

$(7,3,4) = a\cdot(1,2,0) + b\cdot(-4,3,4)$

$7 = a - 4b$

$\left\{\begin{array}{l} 3 = 2a + 3b \\ 4 = 0 + 4b \end{array}\right. \longrightarrow 4 = 4b \Rightarrow b = 1$

$3 = 2a + 3 \Rightarrow 0 = 2a \Rightarrow a = 0$

$\cancel{7 = 0 - 4\cdot 1}$ NO

el vector $(7,3,4)$ no es c. lineal de los vectores $(1,2,0)$ y $(-4,3,4)$.//

1.1.3 DEPENDÈNCIA I INDEPENDÈNCIA LINEAL DE VECTORS

l. depend: $u_1 = (1,3)$, $u_2 = (2,1)$, $u_3 = (3,4)$

l. indep: $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (0,1,0)$, $u_3 = (0,0,1)$

En un conjunt de vectors els vectors poden ser linealment **dependents** o linealment **independents.**

Seran **linealment dependents** si com a mínim un d'ells es pot escriure com a combinació lineal de la resta.

Seran **linealment independents** si cap d'ells es pot escriure com a combinació lineal de la resta.

El **Teorema de caracterització** ens indica que en general, un conjunt de vectors són linealment independents si i només sí existeix una única combinació lineal entre ells que resulti ser el vector nul i que aquesta correspongui a tots els escalars = 0.

$$\lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_k \cdot \vec{x}_k = \vec{0} \xrightarrow{\text{implica}} \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0.$$ [10]

Exercici 2:

Demostra que els tres vectors (7,3,4) , (1,2,0) i (-4,3,4) son linealment independents mentre que els vectors (-1,9,4) , (1,2,0) i (-4,3,4) no ho son.

$a(7,3,4) + b(1,2,0) + c(-4,3,4) = (0,0,0)$

$\left\{\begin{array}{l} 7a + b - 4c = 0 \longrightarrow b = 4c - 7a \\ 3a + 2b + 3c = 0 \\ 4a + 4c = 0 \end{array}\right.$ $\quad 3a + 2(4c - 7a) + 3c = 0$, $\quad 4a + 4c = 0$

$\left\{\begin{array}{l} 3a + 8c - 14a + 3c = 0 \\ 4a + 4c = 0 \end{array}\right.$ $\quad \left.\begin{array}{l} -11a + 11c = 0 \\ 4a + 4c = 0 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} -a + c = 0 \\ a + c = 0 \end{array}\right\} +$ $\quad -a + c = 0 \Rightarrow a = 0$

$2c = 0 \Rightarrow c = 0 \quad b = 4\cdot 0 - 7\cdot 0 = 0$

$a = b = c = 0$

$\Rightarrow$ los vectores $(7,3,4)$, $(-4,3,4)$ y $(1,2,0)$ son linealmente independientes.

$a(-1,9,4) + b(1,2,0) + c(-4,3,4) = (0,0,0)$

$\left\{\begin{array}{l} -a + b - 4c = 0 \longrightarrow b = 4c + a \\ 9a + 2b + 3c = 0 \\ 4a + 4c = 0 \end{array}\right.$ $\rightarrow 9a + 2(4c + a) + 3c = 0$, $\quad 4a + 4c = 0$

$9a + 8c + 2a + 3c = 0$, $\quad 4a + 4c = 0$ $\quad \left.\begin{array}{l} 11a + 11c = 0 \\ 4a + 4c = 0 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} a + c = 0 \\ a + c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -c$, $\quad b = 4c - c = 3c$

$a = -c$, $b = 3c$, $c = c$ $\quad c = 0$: $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ $\quad c = 1$: $a = -1$, $b = 3$, $c = 1$

$\Rightarrow$ los vectores son linealmente dependientes.

Relació entre independència lineal de vectors i rang d'una matriu.

Les matrius son un element molt útil per a saber si un conjunt de vectors es linealment dependent o independent. Hi ha un procés molt senzill per a saber-ho en el cas que tinguis n vectors de dimensió n. Només cal seguir els següents passos:

- 1. Formar una matriu col·locant cadascun dels vectors en una fila diferent.
- 2. Calcular el determinant de la matriu.
- 3. Si el determinant és = 0 els vectors són linealment **dependents.**
- 3. Si el determinant és ≠0 els vectors són linealment **independents.**

Recordem que quan el determinant d'una matriu és = 0 vol dir que el rang no és màxim, i si és ≠0 estem davant d'una matriu de rang màxim. Per tant:

- Rang màxim —> Linealment Independents $\Rightarrow |A| \neq 0$
- Rang < màxim —> Linealment dependents. $\Rightarrow |A| = 0$

n vectores de $\mathbb{R}^n$

Exemple: $\left.\begin{array}{l} u_1 = (7,3,4) \\ u_2 = (-4,3,4) \\ u_3 = (1,2,0) \end{array}\right\}$ 3 vectores en $\mathbb{R}^3$ Son l. independ. $|A| \neq 0$

$\Uparrow$

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ -4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12 - 32 - 12 - 56 \neq 0$$

$\left.\begin{array}{l} u_1 = (-1,9,4) \\ u_2 = (-4,3,4) \\ u_3 = (1,2,0) \end{array}\right\}$ 3 vectores en $\mathbb{R}^3$ donde $|A| = 0$. Son l. dependientes

$\Uparrow$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 9 & 4 \\ -4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 36 - 32 - 12 + 8 = 0$$

$44 - 44$

1.1.4 SISTEMA DE GENERADORS

Un sistema de generadors es un concepte molt important dins d'un espai vectorial. Direm que un conjunt de vectors de R^n formen un sistema de generadors sempre que qualsevol vector es pugui escriure com a combinació lineal d'ells mateixos:

$$(a,b,c) = a\cdot(1,0,0) + b\cdot(0,1,0) + c\cdot(0,0,1).$$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_1 = (1,0,0) \\ u_2 = (0,1,0) \\ u_3 = (0,0,1) \end{array}\right\}$ Son generadores.

$\Downarrow$

$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

$\vec{v} = a\bar{u}_1 + b\bar{u}_2 + c\bar{u}_3$

Propietat de caracterització:

K vectors de R^n formen un sistema de generadors si i només si la matriu que formen té rang n.

Exercici 3:

Prova que els vectors $\underset{u_1}{(1, 0, 0)}$, $\underset{u_2}{(2, 3, -1)}$, $\underset{u_3}{(5, 11, -4)}$ i $\underset{u_4}{(-4, 5, 0)}$ formen un sistema de generadors de R^3.

$u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}^3$ Seran generadores $\Longleftrightarrow (u_1\ u_2\ u_3\ u_4)$ tiene rango 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 11 & -4 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

rang $A \leq 3 \Rightarrow$ Será rango 3 si existe un det $3\times3 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 11 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 0 + 0 + 0 + 11 + 0 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A = 3$$

Estos 4 vectores $K = 4$ $u_1 = (1,0,0)$ $u_2 = (2,3,-1)$ $u_3 = (5,11,-4)$ $u_4 = (-4,5,0)$ forman un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$

1.1.5 BASE DE L'ESPAI VECTORIAL. COMPONENTS D'UN VECTOR EN UNA BASE.

Un conjunt de k *de* R^n forma una base en R^n si formen un sistema de generadors i, a més, són linealment independents.

* Generadores * l. independientes $\Rightarrow$ BASE

Relació entre base d'un Espai vectorial i determinant d'una matriu.

n vectors de R^n formen una base de R^n si i només si la matriu quadrada que formen te determinant diferent de 0

IMPORTANT: 2 vectores de $\mathbb{R}^2$ son l. indep $\Rightarrow$ también son generadores $\Rightarrow$ BASE

3 vectores de $\mathbb{R}^3$ son l. indep $\Rightarrow$ también son generadores $\Rightarrow$ BASE

⋮

$\underbrace{\text{n vectores de } \mathbb{R}^n \text{ son l. indep}}_{|A| \neq 0}$ $\Rightarrow$ también son generadores $\Rightarrow$ BASE

Exercici 4:

Comproveu que els quatre vectors de R^4: $(1, 1, 0, 0)$, $(2, 3, 1, 8)$, $(3, 3, 1, 5)$, $(0, 0, 1, 0)$ formen una base.

Como tenemos 4 vectores de $\mathbb{R}^4$ $\Rightarrow$ solo necesitamos ver que son $\overbrace{\text{l. independientes}}^{|A| \neq 0}$

$\Downarrow$

serán generadores

$\Downarrow$

BASE.

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$-1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}}_{15+24+0-0-24-10} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (5) = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{los vectores son l. indep}$$

$\Downarrow$

también son generadores

$\Downarrow$

Forman BASE

Vector de components d'un vector en una base

Consisteix en trobar les components d'un vector "$\vec{x}$" en una base donada "B". Si es compleix que:

$$\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n$$

Base $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \rangle$

$\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n$

Las componentes del vector $\vec{x}$ en la base $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \rangle$

Es l'expressió de $\vec{x} \epsilon R^n$ en la base $\vec{X}_1 + \ldots + \vec{X}_n$ direm que el vector:

$$\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R^n$$

Es el vector de components de $\vec{X}$ en aquesta base.

Ejemplo $3(1,2) + 2(3,-1) = (8,4) \Rightarrow$ las componentes $\vec{u} = (8,4)$ en la base $(1,2), (3,-1)$ son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 2$

Exercici 5:

Troba el vector de components (2,5,1) en la base de R^3 formada per els vectors (2,0,5) , (3,3,1) , (0,0,1).

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

l. indep.

3 vectores en $\mathbb{R}^3$ l. ind $\Rightarrow$ generar $\Rightarrow$ BASE

$(2,5,1) = a\cdot(2,0,5) + b\cdot(3,3,1) + c\cdot(0,0,1)$

$$\begin{cases} 2 = 2a + 3b \\ 5 = 3b \\ 1 = 5a + b + c \end{cases}$$

$5 = 3b \rightarrow b = 5/3$

$2 = 2a + 3\cdot 5/3$

$2 = 2a + 5 \Rightarrow -3 = 2a \Rightarrow a = -3/2$

$1 = 5\cdot(-3/2) + 5/3 + c \Rightarrow 1 + \frac{15}{2} - \frac{5}{3} = c \Rightarrow \frac{6+45-10}{6} = \frac{41}{6}$

las componentes que buscamos

$(a,b,c) = (-3/2, 5/3, 41/6)$

1.1.6 SUBESPAI VECTORIAL.

Un subespai vectorial és un subconjunt **no buit** d'un espai vectorial "tancat" per les operacions suma i producte d'un escalar.

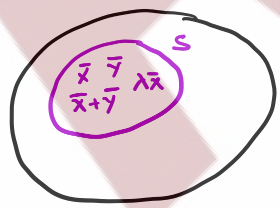
Per a tota parella de vectors dins d'un subespai vectorial s'ha de complir que:

1. Per a tota parella de vectors de S:

$$\vec{x}, \vec{y} \in S \xrightarrow{\text{implica}} \vec{x} + \vec{y} \in S$$

2. Per a tot vector de S i tot escalar:

$$\vec{x} \in S \text{ i } \lambda \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{implica}} \lambda \cdot \vec{x} \in S$$



Exercici 6:

Prova que el conjunt: $s = \{(a, b, 0) \in R^3 : a, b \in R\}$ es un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$

$\vec{x}_1 = (a,b,0) \in S$

$\vec{x}_2 = (c,d,0) \in S$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = (a,b,0) + (c,d,0) = (a+c, b+d, \underline{0}) \in S$

$\lambda\cdot\bar{x}_1 = \lambda\cdot(a,b,0) = (\lambda a, \lambda b, \underline{0}) \in S$

Es obligatorio $\vec{0} \in S \Rightarrow$ Si no contiene el vector nulo $\bar{0} \notin S \Rightarrow$ S no sería un subespacio vectorial.

Subespai vectorial generat per un conjunt de vectors

Com tot subespai vectorial és, en particular, un espai vectorial en sí mateix, admetrà bases i dimensió. Un subespai vectorial generat per un conjunt finit de vectors és, precisament, el conjunt format per totes les combinacions lineals d'aquests vectors.

Ejemplo: $S = \{(a,b,0) \in \mathbb{R}^3 : a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio vectorial

$\langle(a,b,0)\rangle = \langle a(1,0,0) + b(0,1,0)\rangle = \langle(1,0,0) + (0,1,0)\rangle$

base del subespacio S

fijaros rango $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ l. ind.

normalmente

coeficients de a.

$a = 1 \Rightarrow (1,0,0)$

$b = 1 \Rightarrow (0,1,0)$

coeficients de b.

generadores:

$(x,y,0) = x\cdot(1,0,0) + y(0,1,0)$

dimensión de $S = 2$

$\langle(a+b, b, a)\rangle - \langle(1,0,1), (1,1,0)\rangle$

analíticamente $\Rightarrow S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$

NOVA

EXERCICIS DEL TEMA: ESPAI VECTORIAL

1. *Troba els valors del paràmetre* $a \in \mathbb{R}$ *de manera que el vector* $\overbrace{(-2,-1,5,0)}^{u_1}$ *sigui combinació lineals dels vectors* $\overbrace{(2,4,7,6)}^{u_2}$ *i* $\overbrace{(a,2,-1,a)}^{u_3}$.

Si $\overline{u_1}$ es comb. lineal de u_2 i $u_3 \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}$ l. depend $\Rightarrow$ rango (u_1,u_2,u_3) no es máximo.

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 6 \\ a & 2 & -1 & a \end{pmatrix} = A \qquad \begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = -7a + 60 + 0 + 0 - 6 - 20a = -27a + 54 = 0 \quad a = 2$$

Sol: si $a=2$ el rango $(u_1,u_2,u_3)=2$ $\Rightarrow u_1,u_2,u_3$ l. dep $\Rightarrow \overline{u_1}$ es c.l de $\overline{u_2}, \overline{u_3}$

Si $a=2$ $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A$

Tengo que ver que $\nexists$ ningún det $3\times3 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 8 - 14 + 20 - 40 + 28 - 2 = 0 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -28 + 60 - 12 - 20 = 0$$

2. *Prova que, independentment del valor del paràmetre* $m \in \mathbb{R}$, *els vectors* $(1,3,0,-1)$, $(5,-4,1,0)$, $(0,3,-1,m)$ *i* $(m,2,1,-6)$ *són linealment independents. Formen una base de* $\mathbb{R}^4$*? Raona la resposta.*

4 vectores a $\mathbb{R}^4$ son l. indep si $\det(u_1,u_2,u_3,u_4) \neq 0$

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & m \\ m & 2 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & m \\ 2 & 1 & -6 \end{vmatrix}}_{-24+2m+4m+18} - 3\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & m \\ m & 1 & -6 \end{vmatrix}}_{30+m^2-5m} + 0\cdot\begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & m \\ m & 2 & -6 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ m & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{15+4m-3m+10} =$$

$$= -24 + 2m + 4m + 18 - 90 - 3m^2 + 15m + 15 + 4m - 3m + 10$$
$$= -3m^2 - 22m - 71 = 0$$
$$3m^2 + 22m + 71 = 0 \qquad m = \frac{-22 \pm \sqrt{22^2 - 4\cdot3\cdot71}}{6} \ \nexists$$

$\forall m$ $|A| \neq 0 \Rightarrow u_1,u_2,u_3,u_4$ l. ind.

Forman BASE:

4 vectores a $\mathbb{R}^4$ l. indep $\Rightarrow$ generad $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ BASE.

3. *Prova que qualsevol conjunt de vectors que inclogui el vector nul no pot ser un conjunt de vectors linealment independents.*

Sabemos $\det(\vec{0}, u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$

$\vec{u_1} = (0,0,0,\dots,0)$ n dimensional
$\vec{u_2} = (\dots\dots)$
$\vec{u_3} = (\dots\dots)$
$\vdots$
$\vec{u_n} = (\dots\dots)$

seran l. ind si $|A| \neq 0$

$A = \left|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \end{matrix}\right| \Rightarrow$ determinante cuando una linea es todo cero $|A| = 0$

no pueden ser l. indep. $\Leftarrow$

4. *Prova que* $\overbrace{(-1,0,4,3)}^{u_1}$, $\overbrace{(6,5,0,3)}^{u_2}$ *i* $\overbrace{(0,-2,1,0)}^{u_3}$ *són linealment independents i troba un vector que, juntament amb ells, doni lloc a una base de* $\mathbb{R}^4$.

u_1, u_2, u_3 l. ind si rang(u_1,u_2,u_3) es máximo

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ el rango A $= 3$ si existe un det $3\times3 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -24 + 15 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 \text{ que es máximo} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (-1,0,4,3), (6,5,0,3), (0,-2,1,0)$ son l. indep.

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Base: $\langle (-1,0,4,3)\ (6,5,0,3)\ (0,-2,1,0)\ (1,0,0,0) \rangle$

5. *Prova que, per a tot $a \neq -1$, els vectors $(a,0,-3)$, $(2,-a,5)$ i $(0,1,a)$ formen base de $\mathbb{R}^3$ i determina el vector de components de $(2,1,2)$ per $a=0$.*

u_1, u_2, u_3 de $\mathbb{R}^3$ Base si son l. indep $\Rightarrow$ $\Rightarrow \det(u_1,u_2,u_3) \neq 0$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -3 \\ 2 & -a & 5 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = -a^3 + 0 - 6 + 0 - 5a + 0 = -a^3 - 5a - 6 = 0$$

$$a^3 + 5a + 6 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 5 & 6 \\ -1 & & -1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & 6 & 0 \end{array}$$

$$a^2 - a + 6 = 0$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \quad \nexists$$

Si $a = -1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow$ l. dep.

Si $a \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ l. indep $\Rightarrow$ BASE

3 vectores en $\mathbb{R}^3$

componentes

$(2,1,2) = m(0,0,-3) + n(2,0,5) + p(0,1,0)$

$2 = 2n \Rightarrow n = 1$

$1 = p \Rightarrow p = 1$

$2 = -3m + 5n \rightarrow 2 = -3m + 5$

$-3 = -3m \quad m = 1$

6. *Demostra que si $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in \mathbb{R}^n$ és una base de $\mathbb{R}^n$ aleshores també ho és el conjunt de vectors definit per:*

$$\begin{cases} \vec{y}_1 = \vec{x}_1 \\ \vec{y}_2 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \\ \vdots \\ \vec{y}_n = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n \end{cases}$$

Sabemos: $\det(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) \neq 0$

$\hookrightarrow$ l. independientes

Tenemos que ver $\det(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0 \Rightarrow$ l. ind $\Rightarrow$ BASE

$$\det(\bar{x}_1, \bar{x}_1 + \bar{x}_2, \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \cdots + \bar{x}_n) =$$

$$= \underbrace{\det(x_1, x_1, x_1 + x_2 + x_3, \ldots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}_{=0} + \det(x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_3, \ldots, x_1 + \cdots + x_n)$$

$$= \underbrace{\det(x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1 + \cdots + x_n)}_{=0} + \underbrace{\det(x_1, x_2, x_2, \ldots, x_1 + \cdots + x_n)}_{=0} + \det(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_1 + \cdots + x_n) =$$

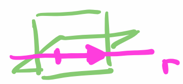
$$= \cdots = \det(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \neq 0$$

7. *Determina una base i la dimensió dels subespais vectorials:*

a. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = 0, x - 2z = 0\}$.

b. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$.

a) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$ $\rightarrow 2x = y$; $\rightarrow \frac{x}{2} = z$



$$\langle (x, 2x, \tfrac{x}{2}) \rangle = \langle (1, 2, \tfrac{1}{2}) \rangle = \langle \underbrace{(2,4,1)}_{\text{base}} \rangle$$

dimensión 1.

b) $x + 2y + 3z = 0$

$x = -2y - 3z$

$$\langle (-2y - 3z, y, z) \rangle = \langle \underbrace{(-2,1,0), (-3,0,1)}_{\text{base}} \rangle \Rightarrow \text{dimensión } 2$$

8. *Determina una base, la dimensió i l'expressió analítica o conjuntista del subespai vectorial generat pels vectors $(4,0,-1)$, $(3,5,2)$ i $(11,5,0)$.* $\Rightarrow$ estos 3 vectores no son l. indep.

1) Calculamos el determinante: $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 11 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 15 + 55 - 40 + 0 = 0$

2) observamos

$\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$ Base $\langle (4,0,-1), (3,5,2) \rangle$ dimensión 2.

$(x,y,z) = a(4,0,-1) + b(3,5,2)$

$$\begin{cases} x = 4a + 3b \\ y = 5b \\ z = -a + 2b \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & x \\ 0 & 5 & y \\ -1 & 2 & z \end{array}\right) \underset{F_3' = 4F_3 + F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 4 & 3 & x \\ 0 & 5 & y \\ 0 & 11 & 4z + x \end{pmatrix} \underset{F_3' = 5F_3 - 11F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 4 & 3 & x \\ 0 & 5 & y \\ 0 & 0 & \boxed{5(4z + x) - 11y} \end{pmatrix}$$

$20z + 5x - 11y$

$5x - 11y + 20z = 0$

NOVA

$S = \{(x, y, z) : 5x - 11y + 20z = 0\}$

Otra manera: Buscamos el plano que passa $\vec{u}_1 = (4, 0, -1)$

$\vec{u}_2 = (3, 5, 2)$

$A = (0, 0, 0)$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 3y + 20z + 0 + 5x - 8y$$

$$= 5x - 11y + 20z = 0$$