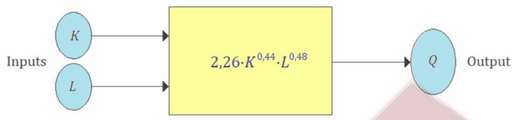
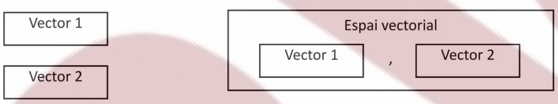
1.1 ESPAIS VECTORIALS

1.1.1 CONCEPTE

Aquesta funció relaciona la quantitat produïda(Q) amb els factors que la componen (K) i (L) que corresponen a factors de producció de capital i de treball respectivament.



Un espai vectorial està format bàsicament per un conjunt de vectors:



La **suma interna de vectors**, consisteix en sumar dos vectors amb el **mateix nombre d'elements** de tal manera que es sumen entre ells els elements situats en la mateixa posició de cadascun dels vectors: $\vec{x}+\vec{y}=(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$

El **producte extern de vectors** consisteix en multiplicar un mateix escalar/nombre per cadascun dels elements dins d'un vector:

$$\lambda\cdot\vec{x}=\lambda\cdot(x_1,\dots,x_n)=(\lambda\cdot x_1,\dots,\lambda\cdot x_n), \text{ per a tot } \lambda\in\mathbb{R}.$$

El **vector nul** és aquell vector el qual tots els seus elements són el nombre 0:

El **vector oposat** a un altre vector correspon a canviar de signe tots els elements del vector original:

També hem de tenir en compte les següents propietats d'un espai vectorial:

- $\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}$. En particular: $0\cdot\vec{x}=\vec{0}$.
- $\lambda\cdot\vec{x}=\vec{0}\xrightarrow{\text{implica}}\lambda=0$ ó $\vec{x}=\vec{0}$.
- $-(\lambda\cdot\vec{x})=(-\lambda)\cdot\vec{x}$.
- $\vec{x}=\vec{y}\xleftrightarrow{\text{Equivalent}}\vec{x}-\vec{y}=\vec{0}$.

1.1.2 COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORS

Un vector (V_1) es pot considerar **combinació lineal** de dos altres vectors(V_2 i V_3) si aquest pot estar format per per la suma de cadascun d'ells multiplicat per un escalar (mirar esquema):

$$\boxed{V_1=k_1\cdot V_2+k_2\cdot V_3}$$

2 nombres qualsevol

Exercici 1:

Prova si els vectors (-1,9,4) i (7,3,4) són combinació lineal dels vectors (1,2,0) i (-4,3,4).

1.1.3 DEPENDÈNCIA I INDEPENDÈNCIA LINEAL DE VECTORS

En un conjunt de vectors els vectors poden ser linealment **dependents** o linealment **independents.**

Seran **linealment dependents** si com a mínim un d'ells es pot escriure com a combinació lineal de la resta.

Seran **linealment independents** si cap d'ells es pot escriure com a combinació lineal de la resta.

El **Teorema de caracterització** ens indica que en general, un conjunt de vectors són linealment independents si i només sí existeix una única combinació lineal entre ells que resulti ser el vector nul i que aquesta correspongui a tots els escalars = 0.

$$\lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_k \cdot \vec{x}_k = \vec{0} \xrightarrow{\text{implica}} \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0.$$ [10]

Exercici 2:

Demostra que els tres vectors (7,3,4) , (1,2,0) i (-4,3,4) son linealment independents mentre que els vectors (-1,9,4) , (1,2,0) i (-4,3,4) no ho son.

Relació entre independència lineal de vectors i rang d'una matriu.

Les matrius son un element molt útil per a saber si un conjunt de vectors es linealment dependent o independent. Hi ha un procés molt senzill per a saber-ho en el cas que tinguis n vectors de dimensió n. Només cal seguir els següents passos:

- 1. Formar una matriu col·locant cadascun dels vectors en una fila diferent.
- 2. Calcular el determinant de la matriu.
- 3. Si el determinant és = 0 els vectors són linealment **dependents.**
- 3. Si el determinant és ≠0 els vectors són linealment **independents.**

Recordem que quan el determinant d'una matriu és = 0 vol dir que el rang no és màxim, i si és ≠0 estem davant d'una matriu de rang màxim. Per tant:

- Rang màxim —> Linealment Independents
- Rang < màxim —> Linealment dependents.

Exemple:

1.1.4 SISTEMA DE GENERADORS

Un sistema de generadors es un concepte molt important dins d'un espai vectorial. Direm que un conjunt de vectors de R^n formen un sistema de generadors sempre que qualsevol vector es pugui escriure com a combinació lineal d'ells mateixos:

$$(a,b,c) = a\cdot(1,0,0) + b\cdot(0,1,0) + c\cdot(0,0,1).$$

Propietat de caracterització:

K vectors de R^n formen un sistema de generadors si i només si la matriu que formen té rang n.

Exercici 3:

Prova que els vectors (1, 0, 0), (2, 3, -1), (5, 11, -4) i (-4, 5, 0) formen un sistema de generadors de R^3.

1.1.5 BASE DE L'ESPAI VECTORIAL. COMPONENTS D'UN VECTOR EN UNA BASE.

Un conjunt de k *de* R^n forma una base en R^n si formen un sistema de generadors i, a més, són linealment independents.

Relació entre base d'un Espai vectorial i determinant d'una matriu.

n vectors de R^n formen una base de R^n si i només si la matriu quadrada que formen te determinant diferent de 0

IMPORTANT:

Exercici 4:

Comproveu que els quatre vectors de R^4: $(1, 1, 0, 0)$, $(2, 3, 1, 8)$, $(3, 3, 1, 5)$, $(0, 0, 1, 0)$ formen una base.

Vector de components d'un vector en una base

Consisteix en trobar les components d'un vector "$\vec{x}$" en una base donada "B". Si es compleix que:

$$\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n$$

Es l'expressió de $\vec{x} \epsilon R^n$ en la base $\vec{X}_1 + ... + \vec{X}_n$ direm que el vector:

$$\vec{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in R^n$$

Es el vector de components de $\vec{X}$ en aquesta base.

Exercici 5:

Troba el vector de components (2,5,1) en la base de R^3 formada per els vectors (2,0,5) , (3,3,1) , (0,0,1).

1.1.6 SUBESPAI VECTORIAL.

Un subespai vectorial és un subconjunt **no buit** d'un espai vectorial "tancat" per les operacions suma i resta.

Per a tota parella de vectors dins d'un subespai vectorial s'ha de complir que:

1. Per a tota parella de vectors de S:

$$\vec{x}, \vec{y} \in S \xrightarrow{\text{implica}} \vec{x} + \vec{y} \in S$$

2. Per a tot vector de S i tot escalar:

$$\vec{x} \in S \text{ i } \lambda \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{implica}} \lambda \cdot \vec{x} \in S$$

Exercici 6:

Prova que el conjunt: $s = \{(a, b, 0) \in R^3 : a, b \in R\}$ es un espai vectorial de R^3.

Subespai vectorial generat per un conjunt de vectors

Com tot subespai vectorial és, en particular, un espai vectorial en sí mateix, admetrà bases i dimensió. Un subespai vectorial generat per un conjunt finit de vectors és, precisament, el conjunt format per totes les combinacions lineals d'aquests vectors.

EXERCICIS DEL TEMA: ESPAI VECTORIAL

1. *Troba els valors del paràmetre* $a \in \mathbb{R}$ *de manera que el vector* $(-2,-1,5,0)$ *sigui combinació lineals dels vectors* $(2,4,7,6)$ *i* $(a,2,-1,a)$.

2. *Prova que, independentment del valor del paràmetre* $m \in \mathbb{R}$, *els vectors* $(1,3,0,-1)$, $(5,-4,1,0)$, $(0,3,-1,m)$ *i* $(m,2,1,-6)$ *són linealment independents. Formen una base de* $\mathbb{R}^4$ *? Raona la resposta.*

3. *Prova que qualsevol conjunt de vectors que inclogui el vector nul no pot ser un conjunt de vectors linealment independents.*

4. *Prova que* $(-1,0,4,3)$, $(6,5,0,3)$ *i* $(0,-2,1,0)$ *són linealment independents i troba un vector que, juntament amb ells, doni lloc a una base de* $\mathbb{R}^4$.

NOVA

5. *Prova que, per a tot* $a \neq -1$, *els vectors* $(a,0,-3)$, $(2,-a,5)$ *i* $(0,1,a)$ *formen base de* $\mathbb{R}^3$ *i determina el vector de components de* $(2,1,2)$ *per* $a=0$.

6. *Demostra que si* $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n \in \mathbb{R}^n$ *és una base de* $\mathbb{R}^n$ *aleshores també ho és el conjunt de vectors definit per:*

$$\begin{cases} \vec{y}_1 = \vec{x}_1 \\ \vec{y}_2 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \\ \vdots \\ \vec{y}_n = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n \end{cases}$$

7. *Determina una base i la dimensió dels subespais vectorials:*
   a. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = 0, x - 2z = 0\}$.
   b. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$.

8. *Determina una base, la dimensió i l'expressió analítica o conjuntista del subespai vectorial generat pels vectors* $(4,0,-1)$, $(3,5,2)$ i $(11,5,0)$.