2.1 FUNCIONS REALS DE N VARIABLES

2.1.1 CONCEPTE, DOMINI I CORBES DE NIVELL

Definició de funció escalar

L'estructura bàsica sobre la què ens mourem serà l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$ associat al producte escalar estàndard o habitual [illegible] a la plana 17. En general, i per definició, una *funció escalar real* és tota aplicació de la forma:

$$A \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{\;f\;} \mathbb{R}$$
$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in A \longrightarrow z = f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$$

on $A \subset \mathbb{R}^n$ és el conjunt de punts (o vectors) de $\mathbb{R}^n$ que tenen imatge per la funció i que s'anomena *domini*.

Exemple:

Domini de funcions:

Funcions polinòmiques:

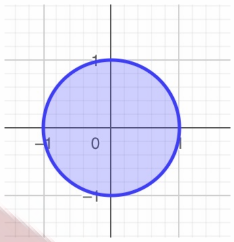
Funcions racionals:

Funcions irracionals:

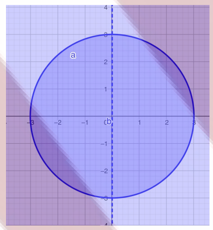
Funcions exponencials:

Exemple:

Determina analíticament i gràficament el domini de la funció escalar: $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$

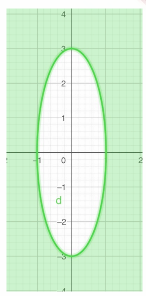


$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{x}.$$



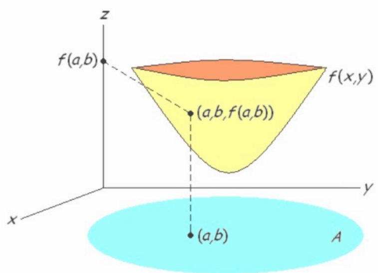
$$f(x,y)=e^{y/x}$$

$$f(x,y)=\sqrt{9-9x^2-y^2}$$



CORBES de nivell d'una funció escalar:

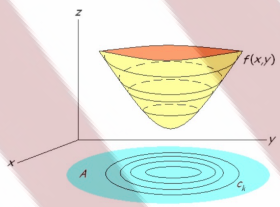
Ja sabem que la representació gràfica d'una funció d'una variable és una corba en el pla. Doncs bé, la d'una funció escalar $z = f(x,y)$ és una "superfície" en l'espai i dibuixar-la pot arribar a ser complicat. Gràficament:



El que es fa generalment és simplificar el problema tot estudiant només les corbes de nivell associades a la funció. Aquestes corbes s'obtenen al tallar la superfície $z = f(x,y)$ per un feix de plans paral·lels i projectar les corbes que en resulten sobre el pla base *XY*. Així doncs, les ***corbes de nivell*** de la funció $A \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ són les corbes del pla *XY* donades per la igualtat:

$$f(x,y) = k \text{, amb } k \in \mathbb{R} \text{ paràmetre}$$

i que denotarem per c_k. Gràficament:

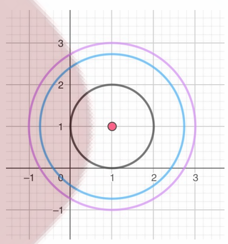


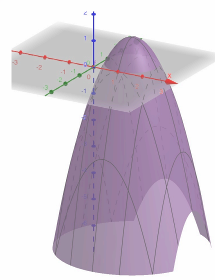
Exemple:

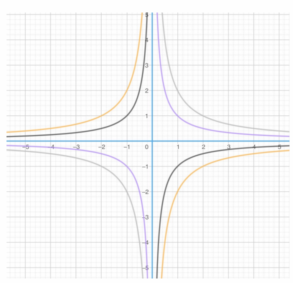
Representa gràficament les corbes de nivell de les funcions:

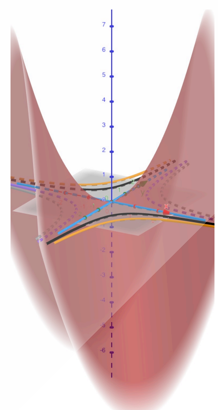
a) $z = 1 - (x - 1)^2 - (y - 1)^2$

b) $f(x, y) = xy$









<u>Exemple</u>: Una empresa monopolística que produeix dos articles de consum, A i B, sap que els seus beneficis venen donats per la funció:

$$B(x, y) = 100x + 200y - x^2 - y^2 - 10.000 \text{ u.m.}$$

on $x > 0$ i $y > 0$ denoten, respectivament, les quantitats produïdes de A i de B. Sabent que la corba de nivell c_k d'aquesta funció de beneficis és la circumferència:

$$(x-50)^2 + (y-100)^2 = 2500 - k$$

prova que el benefici màxim de l'empresa, que és de 2500 u.m., s'assoleix quan es fabriquen 50 unitats de A i 100 de B.

2.1.2. DERIVADES PARCIALS I DIRECCIONALS. VECTOR GRADIENT. MARGINALITAT.

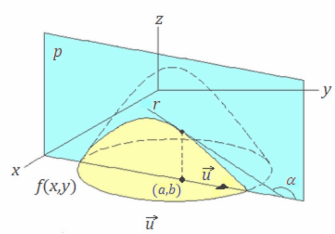
Derivades parcials i direccionals.

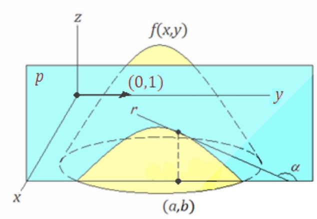
Recordem que una funció real d'una variable $y = f(x)$ és derivable en $a \in Domf \subset \mathbb{R}$ si existeix el límit del quocient incremental:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = f'(a) \in \mathbb{R}.$$

<u>Definició</u>: La funció $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ té **derivada** en $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$ **segons el vector** $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ si existeix el límit:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{a} + t \cdot \vec{u}) - f(\vec{a})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + t \cdot u_1, \dots, a_n + t \cdot u_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t} = f'_{\vec{u}}(\vec{a}) \in \mathbb{R}.$$





En particular:

1. Si $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ és unitari, $f'_{\vec{u}}(\vec{a})$ és la **derivada direccional** en $\vec{a} \in Domf$ **segons** $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$.[71]
2. Si $\vec{u} = \vec{e}_i = \left(\dots 0, \overset{(i)}{1}, 0 \dots\right)$ és el vector vector i-èsim de la base canònica de $\mathbb{R}^n$, $f'_{\vec{e}_i}(\vec{a})$ és la **derivada parcial i-èsima** en $\vec{a} \in Domf$ que expressada en components és:

$$f'_{\vec{e}_i}(\vec{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{t} = \{\text{Notació}\} = \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_i} \in \mathbb{R}.$$

Exemple: Calcula, a partir de la definició, la derivada direccional de $z = f(x,y) = \frac{y}{x}$ en el punt $\vec{a} = (1,1)$ segons el vector unitari associat al vector $(1, \sqrt{3})$.

Càlcul de les DERIVADES PARCIALS a partir de la definició

Exemple: Calcula, a partir de la definició, les derivades parcials en el punt $(1,1)$ de la funció:

$$z = f(x,y) = \frac{y}{x}.$$

- **<u>Càlcul de les DERIVADES PARCIALS a partir de les regles de derivació</u>**

<u>Exemple</u>: Calcula les derivades parcials de les funcions escalars:

1. $z = f(x, y) = 4x^2 - 7y^3 + 2x^2y - 75y + 8.$
2. $z = f(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right).$
3. $z = f(x, y) = x^y$

Aplicacions a les DERIVADES PARCIALS:

Creixement i decreixement parcial d'una funció escalar:

Definició: La funció escalar $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ en un punt $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$

1. És **creixent respecte la variable i-èssima x_i** si:
$$\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_i} > 0.$$
2. És **decreixent respecte la variable i-èssima x_i** si:
$$\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_i} < 0.$$

Exemple: Estudia en el punt (1,2) el creixement i/o decreixement de la funció escalar:
$$z = f(x,y) = \frac{x^2 + y}{x + y^2}.$$

Vector GRADIENT d'una funció en un punt

Definició: El **vector gradient** (o **gradient**) d'una funció escalar $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ en un punt del seu domini $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$ és, per definició, el vector que té per components les derivades parcials de la funció en el punt. És a dir:
$$\nabla f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_n}\right).$$ [81]

Cal remarcar que el gradient d'una funció escalar de n variables en un punt és un vector que té n components. Per tant, si alguna de les derivades parcials que apareixen en la definició no existeix, tampoc existeix el vector gradient.

Exemple: Calcula, si existeix, el gradient en el punt (1,0) de les funcions escalars:
$$(1)\ z = f(x,y) = \frac{y}{x}.\ (2)\ z = f(x,y) = \sqrt{x \cdot y}.$$

Exemple:

Determina los gradientes de las funciones $f(x,y)$ en los puntos que se indican:

a) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$ en $P_0(1,-1)$

b) $f(x,y,z)=6x^5+4xy^2+3yz+z^3$ en $P_0(1,-1,0)$

c) $f(x,y,z)=a\ln x+b\ln y+c\ln z$ en $P_0(a,b,c)$ con $a>0$, $b>0$ y $c>0$.

Aplicación económica: MARGINALITAT

Sigui una funció econòmica $z=f(\vec{x})=f(x_1,\dots,x_n)$ que admet derivada parcial i-èssima en un punt del seu domini $\vec{a}=(a_1,\dots,a_n)\in Domf$, és a dir, que existeix el límit:

$$\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_i}=\lim_{t\to 0}\frac{f(a_1,\dots,a_i+t,\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_i,\dots,a_n)}{t}\in\mathbb{R}.$$

Aleshores, fent $t=1$ s'obtindria l'aproximació:

$$\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_i}\cong f(a_1,\dots,a_i+1,\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_i,\dots,a_n).$$

Per tant, la derivada parcial i-èssima ens mesura, aproximadament, la variació del valor de la funció en $(a_1,\dots,a_n)$ quan la component i-èssima a_i augmenta $u=1$ unitats.

Exemple: Si:

$$B(x,y) = 1100x + 1300y - 2x^2 - 2{,}5y^2 - 70.000$$

és la funció de beneficis associada a la producció i venda de dos articles A i B en les quantitats de 250 i de 220 unitats, calcula aproximadament l'increment dels beneficis si la producció i venda de B augmenta $u = 1$ unitats.

Aplicación económica: ELASTICITATS PARCIALS

Sigui una funció econòmica $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ que admet derivada parcial i-èssima en un punt del seu domini $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$, és a dir, que existeix el límit:

$$\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_i} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{t}.$$

Llavors, l'**elasticitat parcial i-èssima** de la funció en aquest punt, que per definició és igual a l'expressió:

$$E_{x_i} f(\vec{a}) = \frac{a_i}{f(\vec{a})} \cdot \left(\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_i}\right)$$

ens mesura, aproximadament, l'increment percentual de la funció $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ quan la component i-èssima de $\vec{a} = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$ augmenta un $r\% = 1\%$.

Exemple: Si:

$$B(x,y) = 1100x + 1300y - 2x^2 - 2{,}5y^2 - 70.000$$

és la funció de beneficis associada a la producció i venda de dos articles A i B en les quantitats de 250 i de 220 unitats calcula, de forma aproximada, l'increment percentual dels beneficis si la producció i venda de A augmenta un $r\% = 2\%$.

2.1.3. FUNCIÓ DIFERENCIABLE. HIPERPLÀ TANGENT

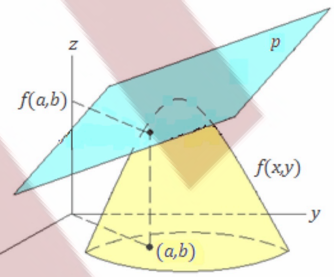
Ja sabem que, en una variable, tenir derivada en un punt és equivalent a tenir recta tangent pel punt. En el domini de les funcions escalars això no passa sempre, és a dir, que existeixen funcions que admeten vector gradient en un punt però no "hiperplà tangent", que és l'equivalent a la recta tangent. Les funcions escalars que admeten hiperplà tangent en un punt són les anomenades funcions escalars **diferenciables** en el punt.

<u>Definició</u>: L'**hiperplà tangent** p a una funció $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ en un punt del seu domini $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$ és el lloc geomètric del punts $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ que satisfan l'equació vectorial:

$$z = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = f(\vec{a}) + \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_1} \cdot (x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_n} \cdot (x_n - a_n).$$

En dues variables, l'hiperplà tangent a una funció $z = f(x, y)$ en un punt (a, b) és el pla d'equació:

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} \cdot (x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} \cdot (y - b).$$



En tres variables, l'hiperplà tangent a una funció $u = f(x, y, x)$ en un punt (a, b, c) té per equació:

$$u = f(a, b, c) + \frac{\partial f(a, b, c)}{\partial x} \cdot (x - a) + \frac{\partial f(a, b, c)}{\partial y} \cdot (y - b) + \frac{\partial f(a, b, c)}{\partial z} \cdot (z - c).$$

<u>Exemple</u>: Troba l'equació del:

1. Pla tangent a la funció escalar $z = f(x, y) = \frac{1+y}{1+x}$ en el punt $(0,1)$. $\Rightarrow f : \mathbb{R}^2$
2. Hiperplà tangent en el punt $(1,2,3)$ a la funció $u = f(x, y, z) = \ln(xyz)$.

Funció escalar DIFERENCIABLE.

La definició de funció escalar diferenciable es pot donar de moltes maneres i nosaltres, aquí, considerarem la que involucra la noció d'hiperplà tangent. En concret, diem que la funció escalar $A \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ és *diferenciable* en un punt $\vec{a} \in A$ si admet hiperplà tangent en aquest punt.

Una aplicació important del concepte de diferencial està relacionada amb el *càlcul aproximat* del valor d'una funció escalar en un punt. A tal fi, es pot provar que si $A \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ és diferenciable en $\vec{a} \in A$ llavors el valor de $f(\vec{x})$, a mesura que $\vec{x}$ s'acosta a $\vec{a}$, és aproximadament igual a l'expressió:

$$f(\vec{x}) \simeq f(\vec{a}) + \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_n}(x_n - a_n).$$ [61]

Teoremas sobre FUNCIONS ESCALARS DIFERENCIABLES.

<u>Exemple</u>: *Prova que la funció escalar:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y}, & x+y \neq 0 \\ 0, & x+y = 0 \end{cases}$$

no és diferenciable en el punt $(0,0)$.

Exemple: *Determina la derivada direccional de la funció diferenciable:*

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

en el punt $(10,3)$ *segons el vector unitari associat a* $(13,-7)$.

Exemple: *Prova que la funció* $f(x,y)=+\sqrt{x^2-y^2}$ *és diferenciable en* $(5,4)$.

Exemple: *Troba la derivada direccional màxima de* $f(x,y)=+\sqrt{x^2-y^2}$ *en el punt* $(5,4)$.

Aplicació del GRADIENT: Càlcul de les DERIVADES segons un vector.

Anem a veure que, sota certes condicions de regularitat, les derivades d'una funció escalar es poden calcular a partir del vector gradient.

Teorema: Si $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ és diferenciable en un punt $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in Domf$ del seu domini, les derivades segons un vector $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ són iguals al producte escalar del gradient de la funció en el punt pel vector. És a dir:

$$f'_{\vec{u}}(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_n}\right) \cdot \vec{u} = \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_1} \cdot u_1 + \cdots + \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_n} \cdot u_n.$$

A més, les derivades direccionals associades a la derivada d'una funció en un punt segons un vector són iguals al producte:

$$f'_{\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}}(\vec{a}) = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot f'_{\vec{u}}(\vec{a}).$$ [84]

Exemple: Donada la funció escalar $z = f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ calcula la seva derivada en el punt $(10,3)$ segons el vector $(13, -7)$, i la derivada direccional associada.

2.1.4 DERIVACIÓ DE FUNCIONS COMPOSTES.

Donada una funció z=f(x, y) i les variables x i y están definidas per : x=x(u, v) i y=y(u, v)

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} =$$

Exemple: Donada $z = f(x, y) = 2xy + xy^2$, on les variables x i y estan definides per:

$$x = x(u, v) = u^2 + v \text{ i } y = y(u, v) = 2u - v^2$$

calcula el gradient de la **funció composta** $z = z(u, v)$ en el punt $(u, v) = (1,1)$.

Ejemplo Dadas $x = x(t) = \operatorname{sen} t$ e $y = y(t) = \cos t$, hallar $\dfrac{dz}{dt}$ para la función

$$z = f(x, y) = x^2y^2 + 2xy + xy^3.$$

2.1.5 DERIVACIÓ DE FUNCIONS IMPLÍCITES.

Val a dir que les funcions escalars implícites són funcions on la relació entre la variable "dependent" i les variables "independents" ve expressada de forma implícita. Per exemple, l'equació:

$$2xz^2 - 3xy + 5yz = 4$$

defineix "implícitament" la variable z en funció de les dues variables x i y que hi romanen. Aquest fet el denotarem per $z = z(x, y)$.

En general:

<u>Definició</u>: Diem que una variable z ve definida "implícitament" per n variables $x_1, \dots, x_n$ si existeix una equació funcional de la forma:

$$F(x_1, \dots, x_n, z) = 0.$$

En aquest cas a la funció:

$$z = z(x_1, \dots, x_n)$$

que es troba "implícita" en l'equació, li direm **funció implícita**.

En molts casos sol passar que la variable implícita z no es pot "explicitar", és a dir, no es pot aïllar de l'equació funcional que la defineix. Malgrat això, sempre podrem calcular les seves derivades parcials i, en aquest sentit, caldrà tenir en compte el teorema següent:

<u>Teorema</u>: Si l'equació funcional:

$$F(x_1, \dots, x_n, z) = 0$$

defineix implícitament la funció:

$$z = z(x_1, \dots, x_n)$$

aleshores la derivada parcial i-èsima de $z = z(x_1, \dots, x_n)$ pot calcular-se a partir de la fórmula:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)}, \text{ per a tot } i = 1, \dots, n.$$

<u>Exemple</u>: Donada l'equació:

$$2xz^2 - 3xy + 5yz = 4$$

que defineix la variable z com a funció implícita de x i y, és a dir, $z = z(x, y)$:

1. Calcula el seu gradient en el punt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ sabent que $z\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 2$.
2. Troba l'equació del pla tangent a la funció implícita en aquest punt.

Calcular $\frac{dy}{dx}$ siendo $f(x,y) = x^4 - y^4$ y considerando que $y = y(x)$

2.1.6 DERIVACIÓ SUCCESSIVA. MATRIU HESSIANA.

DERIVADES PARCIALS segones d'una funció escalar.

Un concepte fonamental en l'àmbit del que estem estudiant és el de matriu hessiana d'una funció escalar en un punt. Aquesta matriu està formada per les derivades parcials segones de la funció en el punt en qüestió.

<u>Definició</u>: La **derivada parcial segona** d'una funció escalar $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ en un punt $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$ respecte les variables (x_i, x_j), en aquest ordre, és la derivada parcial j-èssima de la funció "derivada parcial i-èssima" $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ en el punt. És a dir:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\vec{a})}{\partial x_j} = \{\text{Notació}\} = \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Si $x_i = x_j$ posarem:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_i^2}.$$

<u>Exemple</u>: Calcula en el punt (1,1) les derivades parcials segones de $z = f(x,y) = x \cdot \ln y$.

DERIVADES PARCIALS segones creuades i teorema de Schwarz.

MATRIU HESSIANA d'una funció escalar.

<u>Definició</u>: La **matriu hessiana** d'una funció escalar $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ en un punt del seu domini $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in Domf$, si existeix, és la matriu quadrada formada per les derivades parcials segones la funció en el punt:

$$Hf(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Val a dir que la matriu hessiana, a part de ser quadrada, pot ser simètrica si les derivades parcials segones "creuades" coincideixen:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_j \partial x_i}.$$

91

Exemple: Calcula la matriu hessiana de la funció $z = f(x, y) = x \cdot \ln y$ en el punt $(1,1)$.

2.1.7. FUNCIONS HOMOGÈNIES.

Funció escalar HOMOGÈNIA.

Definició: Una funció $z = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ se'n diu **homogènia de grau** $m \in \mathbb{R}$ si per a tot escalar positiu $t > 0$:

$$f(t \cdot \vec{x}) = f(t \cdot x_1, \dots, t \cdot x_n) = t^m \cdot f(x_1, \dots, x_n) = t^m \cdot f(\vec{x}).$$

Exemple: Proba que la funció escalar $z = f(x, y) = \frac{x-y}{\sqrt{x+y}}$ és homogènia de grau $m = \frac{1}{2}$.

En economía decimos....

Ejemplo Comprobar si es homogénea e indicar el grado de homogeneidad de la siguiente función:

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

Teorema de EULER

Aplicació econòmica de les FUNCIONS HOMOGÈNIES.

Exemple: Una empresa produeix segons la relació:

$$Q = Q(K,L) = 10 \cdot K^{0,3} \cdot L^{0,6}$$

on $Q \geq 0$ és l'output (producte) i $K \geq 0$ i $L \geq 0$ són, respectivament, els intputs del capital i del treball. Si actualment el nivell d'aquests inputs és de $K = 100$ unitats i $L = 50$ unitats:

1. Calcula el nivell actual de l'output.
2. Prova que la funció de producció és una funció homogènia de grau m = 0,9.
3. Calcula, a partir de la igualtat anterior, el nou output així com l'increment relatiu associat si els dos inputs creixen un 2%.

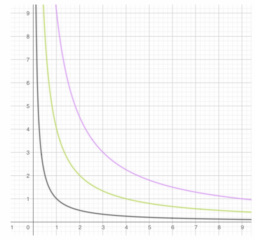
Exemple: Donada la funció:

$$z = f(x, y) = \frac{e^{\sqrt{y/x}}}{xy}$$

1. Prova que és una funció homogènia i determina el seu grau.
2. Quin seria el grau d'homogeneïtat de les funcions derivades parcials associades.

EXERCICIS FUNCIONS REALS DE N VARIABLES

1. Representa gràficament el domini i les corbes de nivell de les funcions escalars:
   a. $z = x^{0,5} \cdot y^{0,5}$.
   b. $z = \frac{x-y}{x+y-2}$.



2. Determina gràficament la 1-corba de nivell de la funció $z = \frac{2xy}{x^2+y^2-4}$.

3. Calcula la norma del vector gradient de:
   a. $z = x^2 + \frac{y^2}{2}$ en el punt (2,1).
   b. $u = 4y^2 + \cos(z - x)$ en el punt $\left(0, \pi, \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Troba l'equació del pla tangent a la funció $z = f(x, y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ en el punt (e, e^2).

5. Calcula la derivada direccional de la funció $z = f(x,y) = \ln(x \cdot y)$ en el punt $(7,2)$ segons el vector $\vec{u} = (-1,5)$.

6. Troba l'equació de la recta tangent en el punt $(2,1)$ a la corba en el pla $y = y(x)$ definida implícitament per l'equació:

$$x^3 + x^2y - 2y^2 - 10y = 0.$$

7. Prova que $f(x,y) = \ln((x-a)^2 + (y-b)^2)$, amb $a, b \in \mathbb{R}$, satisfà l'equació de Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

8. Troba la matriu hessiana de:
   a. $z = 2x^3 - 3y^2 + xy^2 + 2$ en el punt $(3,-1)$.
   b. $u = x^2y - yz^2$ en el punt $(1,1,1)$.