1.2 ESPAI EUCLIDEÀ. FORMES QUADRÀTIQUES

1.2.1 PRODUCTE ESCALAR: DEFINICIÓN I PROPIETATS

Definició:

Com veurem a continuació, el concepte algebraic de producte escalar ens permet introduir nocions "mètriques" en un espai vectorial real.

El producte escalar de dos vectors $\vec{x} i \vec{y} \in R^n$ és igual a l'expressió:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$$

Exemple

Calcula el producte escalar dels vectors (1,0,-5) i (5,-2,1)

Propietats:

Communtativa:

Pseudoassiciatiu:

Positivitat:

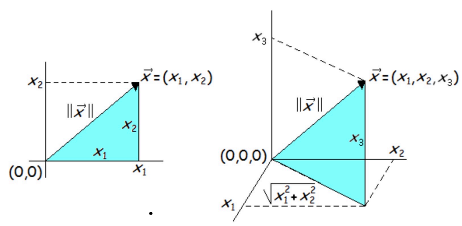
1.2.2 NORMA D'UN VECTOR: DEFINICIÓ I PROPIETATS

La norma del vector $\vec{x} \in R^n$ és igual a l'arrel quadrada del producte escalar del vector per sí mateix:

$$\|\vec{x}\| = +\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = +\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Com a propietats generals de la norma destaquen:

- $\|\vec{x}\| \geq 0$. A més, $\|\vec{x}\| = 0 \xleftrightarrow{\text{Equivalent}} \vec{x} = \vec{0}$.
- $\|\lambda \cdot \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$, per a tot escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.
- *Desigualtat triangular*: $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.
- *Desigualtat de Schwarz*: $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$.
- Si $\vec{x} \neq \vec{0}$, el vector $\frac{1}{\|\vec{x}\|} \cdot \vec{x}$ és un vector unitari.



Angle entre vectors:

La desigualtat de Schwarz fa possible introduir la noció de cosinus d'un angle. En concret, el cosinus de l'angle α entre dos vectors $\vec{x}$ i $\vec{y}$ no nuls és igual al quocient:

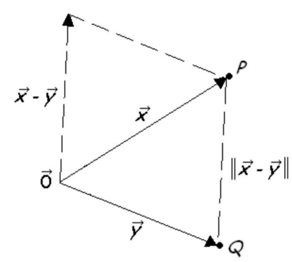
$$\cos\alpha = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}.$$

El cosinus d'un angle ens permet "redefinir" el producte escalar en funció de les normes dels vectors ja que:

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot\cos\alpha$$

Exemple Troba l'angle α que formen els vectors $\vec{x} = (1, 1, 0)$ i $\vec{y} = (2, 9, 6)$.

1.2.3 DISTÀNCIA: DEFINICIÓ I PROPIETATS



Per definició, la distància entre dos vectors $\vec{x}$ i $\vec{y} \in R^n$, ve definida per la norma de la seva diferència, és a dir:

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\|$$

Gràficament, la distància entre dos vectors , $\vec{x}$ i $\vec{y}$ (o, alternativament, entre els dos punts extrems P Q, associats) seria:

Exemple Calcula la distància entre els vectors: $\vec{x} = (3, -2, 0, 1)$ i $\vec{y} = (1, -4, 0, 2)$.

Donats els vectors $\vec{u} = (3, 0, 4)$ i $\vec{v} = (-1, -2, 3)$, es demana

a) [0,5 punts] Calculeu la distància entre els dos vectors.

b) [0,5 punts] Calculeu l'angle format pels dos vectors.

Vectors i bases ortogonals i ortonormals:

Si ens fixem bé en la fórmula del cosinus, veiem que l'anul·lació del producte escalar fa possible expressar formalment la noció de vectors perpendiculars. Així doncs, diem que dos vectors no nuls , $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$ són ortogonals (o també perpendiculars) si el cosinus de l'angle que formen és igual a zero.

El concepte d'ortogonalitat dona lloc de manera natural als conceptes de base ortogonal i ortonormal. En efecte, una base d'un espai euclidià és:

- ***Ortogonal*** si tots els vectors que la formen son ortogonals dos a dos.
- ***Ortonormal*** si és ortogonal i , a més, els seus vectors son unitaris.

Exemple

Troba una base ortonormal de R^3 que contingui els vectors unitaris associats als vectors ortogonals (1,0,-5) i (5,-2,1).

1.2.4 NOCIONS TOPOLÒGIQUES BÀSIQUES

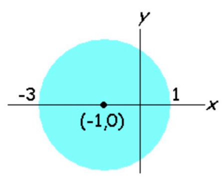
Bola Oberta d'un espai euclidià

Acabem de veure com el producte escalar fa possible definir formalment el que s'entén per distància entre dos vectors (o punts) d'un espai euclidià.

Doncs bé, és precisament aquest concepte mètric el què fonamenta el de bola oberta, la primera de les nocions topològiques que haurem de considerar. Per definició, la bola oberta de centre un punt "P" i de radi "r > 0" és el conjunt de punts (o de vectors) que es troben a una distància de P més petita que r . Així doncs, un punt o vector $\vec{x} \in R^n$ pertany a aquesta bola oberta si:

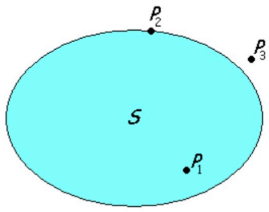
$$d(\vec{x}, P) = \left\|\vec{x} - P\right\| < r$$

Exemple Determina la bola oberta del pla de centre P = (−1,0) i radi r = 2.

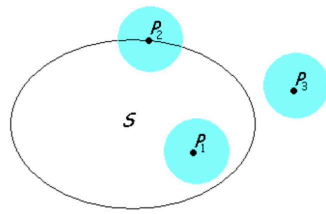


Punt interior, punt exterior i punt frontera d'un conjunt

Notem que, en general, un punt d'un espai euclidià es pot relacionar de tres maneres diferents respecte qualsevol subconjunt de l'espai. Gràficament:



En aquest cas direm que P_1 és un punt interior, P_2 un punt frontera i P_3 un punt exterior de S. En general:

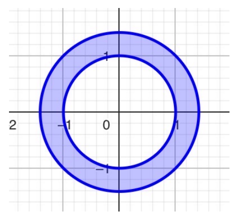


1. *Punt interior* d'un conjunt $S \subset \mathbb{R}^n$ si existeix una bola oberta de centre P continguda en S.
2. *Punt exterior* d'un conjunt $S \subset \mathbb{R}^n$ si és interior al seu complementari.
3. *Punt frontera* d'un conjunt de $S \subset \mathbb{R}^n$ si qualsevol bola oberta de centre P conté punts interiors i punts exteriors a S.

Exemple

Determina gràficament els punts interiors i frontera de

$$S = \{(x, y) \in R^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$$



Conjunt Obert i conjunt tancat

En general, però, poden haver-hi punts de la frontera d'un conjunt que hi pertanyin i d'altres que no. En aquest sentit, i com a casos extrems, tenim els conjunts oberts i tancats. Per definició, un subconjunt de R^n és un conjunt:

1. Obert si no conté cap punt de la seva frontera.

2. Tancat si els conté tots.

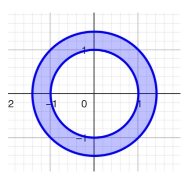
Exemple

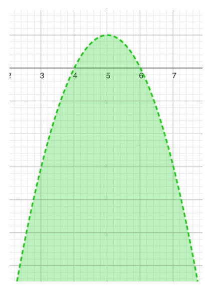
Determina gràficament si són oberts o tancats els conjunts:

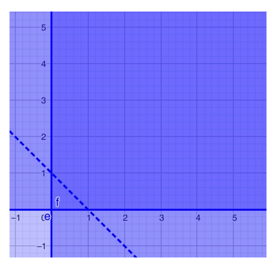
a. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

b. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-5)^2 + y < 1\}$.

c. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 1, x, y \geq 0\}$.







Conjunt acotat i conjunt compacte

Un subconjunt de R^n és un conjunt:

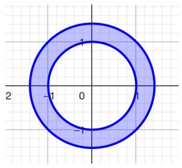
1. Acotat si existeix una bola oberta que el conté.
2. Compacte si, a més d'acotat, és tancat.

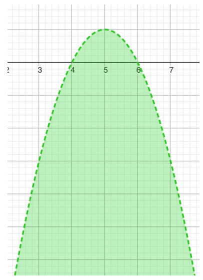
Exemple

Determina gràficament si són acotats i compactes:

a. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 2\}$.

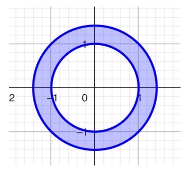
b. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-5)^2 + y < 1\}$

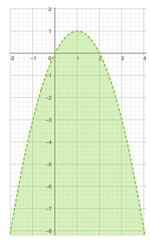




Segment entre dos punts i conjunt convex

Un conjunt $S \in R^n$ és un conjunt convex si conté tots els seus segments possibles. Sempre ho farem a partir de la representació gràfica.





1.2.5 FORMES QUADRÀTIQUES: DEFINICIÓ I PROPIETATS

Formes quadràtiques i classificació

L'aplicació definida per:

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) \longrightarrow f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \end{array}$$

És una forma quadràtica sobre R^3. Ara , si considerem la matriu simètrica donada per :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Que té per elements de la diagonal els coeficients de x_1^2,x_2^2 i x_3^2, i per terme a_{ij} el coeficient del producte $x_i \cdot x_i$, en aquest ordre:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 = f(x_1, x_2, x_3).$$

Una aplicació és una forma quadràtica si existeix una matriu quadrada i simètrica A d'ordre n de manera que:

$$f(\vec{x}) = \vec{x}' \cdot A \cdot \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Signe d'una forma quadràtica

1. *Definida positiva* si $f(\vec{x}) > 0$, per a tot vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ no nul.
2. *Definida negativa* si $f(\vec{x}) < 0$, per a tot vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ no nul.
3. *Semidefinida positiva* si $f(\vec{x}) \geq 0$, per a tot vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. A més, ha d'existir un vector $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ no nul tal que $f(\vec{y}) = 0$.
4. *Semidefinida negativa* si $f(\vec{x}) \leq 0$, per a tot vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. A més, ha d'existir un vector $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ no nul tal que $f(\vec{y}) = 0$.
5. *Indefinida* quan no sigui cap de les anteriors, és a dir, quan existeixin dos vectors no nuls $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ amb $f(\vec{x}) < 0$ i $f(\vec{y}) > 0$.

Exemple

Prova que la forma quadràtica: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy$ es semidefinida positiva.

Mètode de classificació per menors principals
Relació entre el signe d'una forma quadràtica i menors principals

- Definida positiva si i només si tots els menors principals de A són > 0.
- Definida negativa si i només si tots els menors principals d'ordre parell de A són > 0 i els d'ordre imparell són < 0.
- Semidefinida positiva si i només si tots els menors principals de A són ≥ 0, amb $\det A = 0$.
- Semidefinida negativa si i només si tots els menors principals d'ordre parell de A són ≥ 0, els d'ordre imparell són ≤ 0 i $\det A = 0$.
- Indefinida en qualsevol altre cas.

Exemple

Calcula el signe de la forma quadràtica de matriu associada:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Exemple

[1 punt] Classifiqueu la forma quadràtica

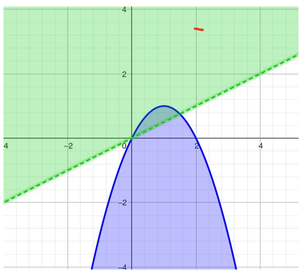
$$Q(x, y, z) = -5x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 2xy - 4xz$$

EXERCICIS DEL TEMA: ESPAI EUCLIDIÀ

Donats els vectors $\vec{x} = (2,1,1)$ *i* $\vec{y} = (3,-2,2)$, *determina:* a) *El seu producte escalar.* b) *Les normes associades.* c) *Els vectors unitaris que hi estan associats.* d) *L'angle* α *que formen.* e) *La distància entre ells.*

Demostra que dos vectors ortogonals són sempre linealment independents, i determina una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ *en la què formin part els vectors unitaris associats als vectors ortogonals* $(1,-3,2)$ *i* $(-1,3,5)$.

Estudia gràficament si el conjunt $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y+x^2\leq 2x, y>0.5x\right\}$ *és obert, tancat, acotat, compacte i/o convex.*



Troba el signe de les formes quadràtiques:

a. $f(x,y,z)=2x^2+3y^2+2z^2+2xz$.

b. $f(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-2xy+2yz$.

c. $f(x,y,z)=-3x^2-4y^2-3z^2+4\sqrt{2}xy+4yz$.

Determina el signe de la forma quadràtica:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$$

restringida al subespai $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 5y\}$.

<u>Exemple</u>: Un seller que produeix tres tipus de vins, rosat, negre i blanc, té uns beneficis anuals donats per la l'expressió:

$$B(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - (2\sqrt{2})xz$$

on $x \geq 0$, $y \geq 0$ i $z \geq 0$ denoten les quantitats d'hectolitres produïts de cadascun d'ells. Prova que: (1) El seller pot tenir pèrdues. (2) Aquest no és el cas si la quantitat produïda de rosat és la meitat de la de blanc.