1. L'ESPAI VECTORIAL

1.1. Espai vectorial real i definicions bàsiques.

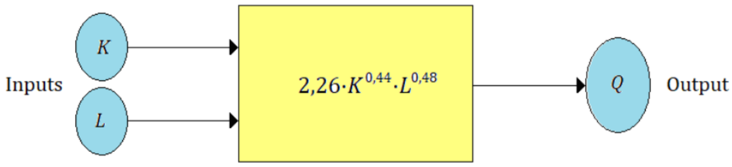
Per a nosaltres la ciència treballa amb dos tipus de magnituds numèriques (tipus de dades). Aquestes són:

- Escalars →El que tota la vida hem conegut com a números.
- Vectors → Element que ajunta més d'un nombre/escalar.

Una de les aplicacions que tindrà la magnitud vectorial en aquesta assigantura és en la funció de **producció de Cobb-Douglass.**

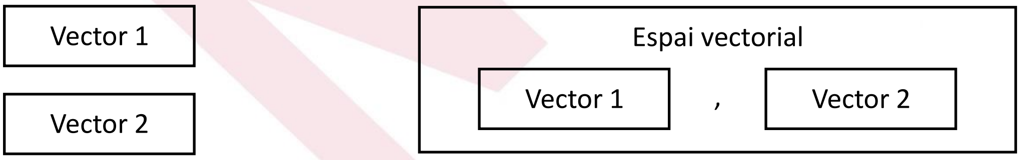
$$\boxed{Q = 2.26 \cdot K^{0.44} \cdot L^{0,48}}$$

Aquesta funció relaciona la quantitat produïda(Q) amb els factors que la componen (K) i (L) que corresponen a factors de producció de capital i de treball respectivament.



1.1.1. Espai vectorial, vectors i escalars.

Un espai vectorial està format bàsicament per un conjunt de vectors:



La **suma interna de vectors**, consisteix en sumar dos vectors amb el **mateix nombre d'elements** de tal manera que es sumen entre ells els elements situats en la mateixa posició de cadascun dels vectors:

$$\boxed{\vec{x} + \vec{y} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)}$$

El **producte extern de vectors** consisteix en multiplicar un mateix escalar/nombre per cadascun dels elements dins d'un vector:

$$\boxed{\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n), \text{ per a tot } \lambda \in \mathbb{R}.}$$

El **vector nul** es aquell vector el qual tots els seus elements són el nombre 0:

$$\vec{0} = \Big(\overbrace{0, \ldots 0}^{n}\Big) \ldots n.$$

El **vector oposat** a un altre vector correspon a canviar de signe tots els elements del vector original:

$$-\vec{x} = (-1) \cdot \vec{x}.$$

També hem de tenir en compte les següents propietats d'un espai vectorial (demostracions a classe):

- $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$. En particular: $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.
- $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0} \xrightarrow{\text{implica}} \lambda = 0$ ó $\vec{x} = \vec{0}$.
- $-(\lambda \cdot \vec{x}) = (-\lambda) \cdot \vec{x}$.
- $\vec{x} = \vec{y} \xleftrightarrow{\text{Equivalent}} \vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$.

1.1.2. Combinació lineal de vectors.

Un vector (V_1) es pot considerar **combinació lineal** de dos altres vectors(V_2 i V_3) si aquest pot estar format per pe rla suma de cadascun d'ells multiplicat per un escalar (mirar esquema):

$$V_1 = k_1 \cdot V_2 + k_2 \cdot V_3$$

2 nombres qualsevol

EXERCICI 1:

Prova si els vectors (-1,9,4) i (7,3,4) són combinació lineal dels vectors (1,2,0) i (-4,3,4).

1.1.3. Dependència e independència lineal de vectors.

En un conjunt de vectors els vectors poden ser linealment **dependents** o linealment **independents.**

Seran **linealment dependents** si com a minim un d'ells es pot escriure com a combinació lineal de la resta.

Seran **linealment independents** si cap d'ells es pot escriure com a combinació lineal de la resta.

El **Teorema de caracterització** ens indica que en general, un conjunt de vectors són linealment independents si i només sí existeix una única combinació lineal entre ells que resulti ser el vector nul i que aquesta correspongui a tots els escalars = 0.

$$\boxed{\lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_k \cdot \vec{x}_k = \vec{0} \xrightarrow{\text{implica}} \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0.}$$ [10]

1.1.3.1. Relació entre independència lineal de vectors i rang d'una matriu.

Les matrius son un element molt útil per a saber si un conjunt de vectors es linealment dependent o independent. Hi ha un procés molt senzill per a saber-ho. Només cal seguir els següents passos:

- 1. Formar una matriu col·locant cadascun dels vectors en una fila diferent.
- 2. Calcular el determinant de la matriu.
- 3. Si el determinant és = 0 els vectors són linealment **dependents.**
- 3. Si el determinant és ≠ 0 els vectors són linealment **independents.**

Recordem que quan el determinant d'una matriu es = 0 vol dir que el rang no és màxim, i si és ≠ 0 estem davant d'una matriu de rang màxim. Per tant:

- Rang màxim → Linealment Dependents
- Rang < màxim → Linealment Independents.

EXERCICI 1.1:

Demostra que els tres vectors (7,3,4) , (1,2,0) i (-4,3,4) son linealment independents mentre que els vectors (-1,9,4) , (1,2,0) i (-4,3,4) no ho son.

1.1.4. Sistema de generadors d'un espai vectorial.

Un sistema de generadors es un concepte molt important dins d'un espai vectorial. Direm que un conjunt de vectors de R^n formen un sistema de generadors sempre que qualsevol vector es pugui escriure com a combinació lineal d'ells mateixos:

$$\boxed{(a,b,c) = a\cdot(1,0,0) + b\cdot(0,1,0) + c\cdot(0,0,1).}$$

Propietat de caracterització:

K vectors de $\mathbb{R}^n$ formen un sistema de generadors si i només si la matriu que formen té rang n.

EXERCICI 2:

Prova que els vectors (1, 0, 0), (2, 3, -1), (5, 11, -4) i (-4, 5, 0) formen un sistema de generadors de R^3.

1.2. **Base i dimensió d'un espai vectorial**.

Un conjunt de k ∋ R^n forma una base de R^n si formen un sistema de generadors i, a més, són linealment independents.

1.2.1. Relació entre base d'un Espai vectorial i determinant d'una matriu.

n vectors de $\mathbb{R}^n$ formen una base de $\mathbb{R}^n$ si i només si la matriu quadrada que formen te determinant diferent de 0.

EXERCICI 3:

Comproveu que els quatre vectors de $\mathbb{R}^4$: $(1,1,0,0)$, $(2,3,1,8)$, $(3,3,1,5)$, $(0,0,1,0)$ formen una base.

1.2.2. Vector de components d'un vector en una base

Consisteix en trobar les components d'un vector "$\vec{x}$" en una base donada "B". Si es compleix que:

$$\boxed{\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n}$$

Es l'expressió de $\vec{x} \epsilon \mathbb{R}^n$ en la base $\vec{X}_1$+.....+$\vec{X}_n$ direm que el vector:

$$\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$$

Es el vector de components de $\vec{X}$ en aquesta base.

EXERCICI 4:

Troba el vector de components (2,5,1) en la base de $\mathbb{R}^3$ formada per els vectors (2,0,5) , (3,3,1) , (0,0,1).