T1. VARIABLES ALEATORIAS

- V.A. DISCRETAS: Binomial, Poisson
- V.A. CONTINUAS: Uniforme, Normal

1) Variables Aleatorias Discretas

$p(x) \equiv$ función probabilidad $\quad 0 \leq p(x_i) \leq 1$

$\sum p(x_i) = 1$

$F(x) \equiv$ función distribución

x_i	0	1	2	3
$p(x_i)$	0'2	0'1	0'5	0'2
$F(x_i)$	0'2	0'3	0'8	1

$\rightarrow \sum p(x_i) = 1$

$p(x=2) = 0'5$

$p(x \leq 2) = p(x=0) + p(x=1) + p(x=2) = F(2) = 0'8$

$p(x < 2) = p(x=0) + p(x=1) = F(1) = 0'3$

Esperanza : $E(x) = \mu = \sum x_i p(x_i)$

Varianza : $Var(x) = \sigma^2 = \underbrace{E(x^2)}_{\text{momento de orden 2 respecto al origen}} - (E(x))^2$

* Binomial $B(n, p)$ → parámetros

$n \equiv$ nº de veces que se repite el experimento

$p \equiv$ prob. de éxito (prob. de la pregunta)

$q \equiv$ prob de no éxito

$$p + q = 1 \rightarrow q = 1 - p$$

- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \rightarrow n \; nCr \; n =$$

$$\binom{5}{2} \rightarrow 5 \; nCr \; 2 = 10$$

- $E(x) = np$
- $Var(x) = npq = np(1-p)$
- $\sigma = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{npq}$

$n + 1$ casos

1. La población de un país tiene una tasa de paro del 15% de la población activa. Si se seleccionan al azar 9 personas de dicha población, ¿cuál es la probabilidad de que 4 de estos 9 estén en paro?

a) 2,8%
b) 1,3%
c) 5,4%
d) 6,8%

X ~ personas en paro $\rightarrow q = 1 - 0'15 = 0'85$

$X \sim B(n = 9, p = 0'15)$

$$p(X=4) = \underbrace{\binom{9}{4}}_{9nCr4 = 126} 0'15^4 \cdot 0'85^5 = 0'0283$$

2'8%

5. En cierto colectivo de 20 empresas observamos que el 35% tiene problemas de liquidez. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 de ellas tengan problemas de liquidez?

a) 0,9978
b) 0,009
c) 0,0022
d) 0,9910

X ~ emp. con probl. liq.

$X \sim B(n = 20, p = 0'35)$

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - (p(X=0) + p(X=1)) =$$
$$= 1 - F(1)$$
$$= 1 - (p(X=0) + p(X=1)) =$$
$$= 1 - \left(\underbrace{\binom{20}{0}}_{1} \underbrace{0'35^0}_{1} \cdot 0'65^{20} + \underbrace{\binom{20}{1}}_{20} 0'35^1 \cdot 0'65^{19}\right) = 0'9978$$

a) ✓

* Poisson $P(\lambda)$ → parámetro

λ = nº medio de veces que se repite el suceso

∞ casos

- $p(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

$0! = 1$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$

- $E(X) = \lambda$
- $Var(X) = \lambda$
- $\sigma = \sqrt{\lambda}$

2. Las llamadas al orden que un profesor tiene que hacer a sus alumnos se distribuye según una Poisson con un valor esperado igual a 2 avisos por hora. Si en una semana determinada el profesor imparte 5 horas de clase, ¿cuál es la probabilidad de que tenga que avisarles menos de 4 veces en una semana?

a) 0,6539
b) 0,05
c) 0,10
d) 0,01

$\lambda_{1HORA} = 2 \longrightarrow \lambda_{1SEMANA} = \lambda_{SH} = 10$

$X \sim P(\lambda_{1SEM} = 10)$

$p(X < 4) = F(3) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) =$

$$= \frac{e^{-10} \cdot 10^0}{0!} + \frac{e^{-10} \cdot 10^1}{1!} + \frac{e^{-10} \cdot 10^2}{2!} + \frac{e^{-10} \cdot 10^3}{3!} =$$

$$= e^{-10} \cdot \left(1 + 10 + \frac{100}{2} + \frac{1000}{3 \cdot 2}\right) = 0'0103$$

d) ✓

4. Una sucursal del BBVA concede por término medio 2 créditos a empresas por semana. ¿Cuál es la probabilidad de que en 2 semanas otorgue al menos 3 créditos a empresas?

a) 0,8125
b) 0,7619
c) 0,1875
d) 0,2381

$\lambda_{1SEMANA} = 2 \longrightarrow \lambda_{2SEMANAS} = 4$

$X \sim P(\lambda_{2SEM} = 4)$

$p(X \geq 3) = 1 - p(X < 3) = 1 - F(2) =$

$= 1 - (p(x=0) + p(x=1) + p(x=2)) =$

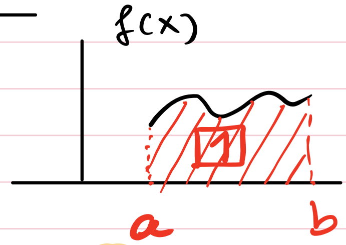
$= 1 - \left(\frac{e^{-4} \cdot 4^0}{0!} + \frac{e^{-4} \cdot 4^1}{1!} + \frac{e^{-4} \cdot 4^2}{2!} \right) =$

$= 0'76189 \longrightarrow$ b) ✓

2) Variables Aleatorias Continuas

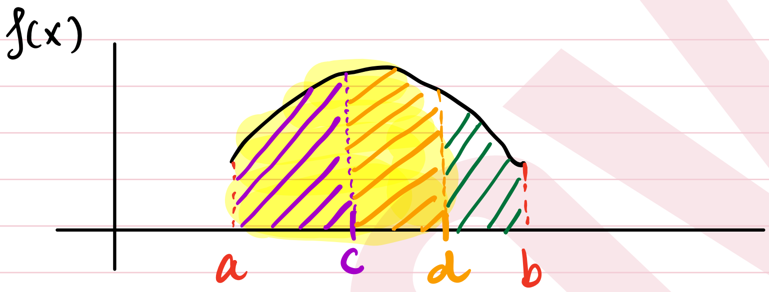
- $f(x) \equiv$ función densidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$



- $F(x) \equiv$ función distribución $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$

- $p(x) \equiv$ función probabilidad $\begin{cases} p(X=c) = 0 \rightarrow \text{No está definida} \\ \text{la probabilidad solo se puede calcular en un intervalo} \end{cases}$



$p(X=c) = 0$

$p(X<c) = F(c) = p(X \leq c)$

$p(c<X<d) = F(d) - F(c)$

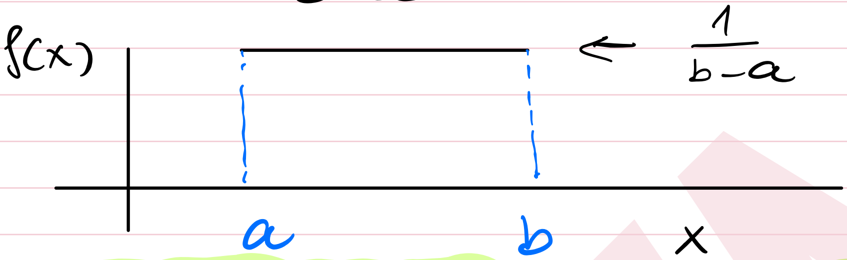
$p(X>d) = F(b) - F(d) =$
$= 1 - F(d)$

- $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx = \mu$

- $Var(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \sigma^2$

* Uniforme $U(a, b)$ → parámetros

- $f(x) = \dfrac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b$

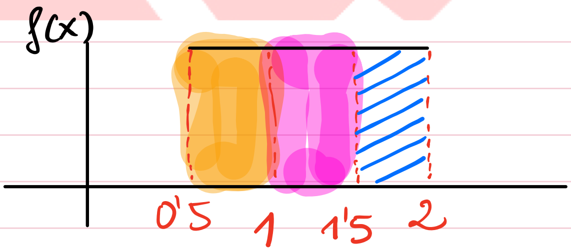


- $F(x) = \dfrac{x-a}{b-a} \quad a \leq x \leq b$
- $E(x) = \dfrac{a+b}{2} = Me(x)$
- $Var(x) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
- $\sigma_x = \sqrt{\dfrac{(b-a)^2}{12}} = \dfrac{b-a}{\sqrt{12}}$

3. Si X es una variable aleatoria que sigue una distribución Uniforme entre [0,5; 2]. ¿Cuál es la probabilidad de que X tome un valor superior a 1,5?

a) 0,33
b) 0,25
c) 0,47
d) 0,97

$F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$



$X \sim U(a = 0'5, b = 2)$

$p(x > 1'5) = \dfrac{1}{3} = 0'33$

$p(x > 1'5) = 1 - p(x \leq 1'5) = 1 - F(1'5) =$

$= 1 - \dfrac{1'5 - 0'5}{2 - 0'5} = 0'33$

- $P(X < 1) = F(1) = \dfrac{1-0'5}{2-0'5} = 0'33$

- $P(1 < X < 1'5) = F(1'5) - F(1) =$

$$= \frac{1'5-0'5}{2-0'5} - \frac{1-0'5}{2-0'5} = 0'33$$

- $P(0 < X < 3) = F(3) - F(0) =$

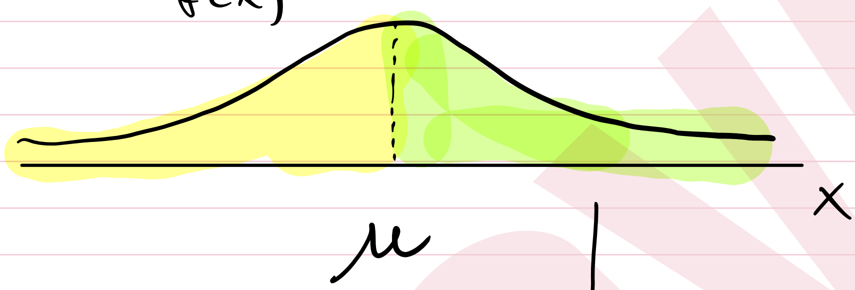
$$= F(2) - F(0'5) = 1$$

* Normal $N(\mu, \sigma)$ → parámetros

$\mu \rightarrow$ media

$\sigma \rightarrow$ desviación

$\sigma^2 \rightarrow$ varianza



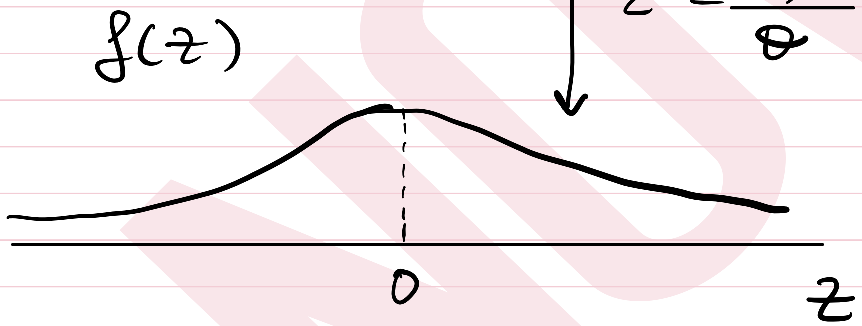
$P(X < \mu) = 0'5$

$P(X > \mu) = 0'5$

$P(X = \mu) = 0$

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$z \sim N(\mu = 0, \sigma = 1)$

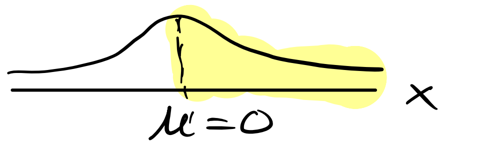


12. La temperatura de una ciudad se distribuye según una normal de valor esperado 0 grados y varianza desconocida. ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura sea superior a los 0 grados?

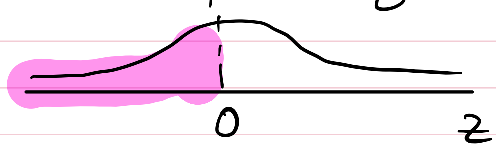
a) 1
b) 0,5
c) 0,64
d) 0

$X \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = ?)$

$P(X > 0) = 0'5$



$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$



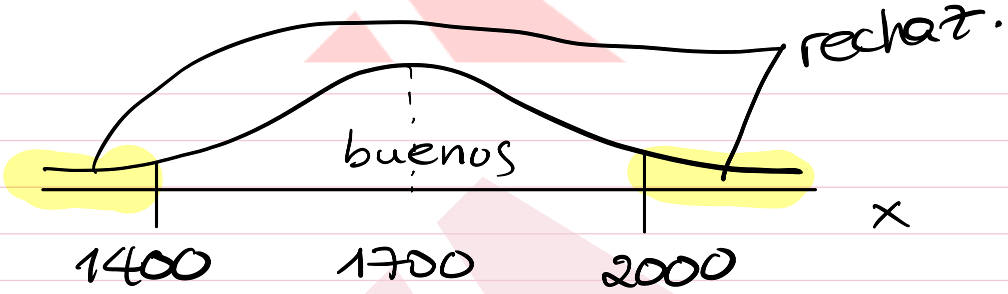
$$P(X > 0) = P\left(z > \frac{0 - 0}{\sigma}\right) =$$

$$= P(z > 0) = 1 - P(z \le 0) = 1 - \underbrace{F(0)}_{0'5} = 0'5$$

14. El peso de los productos que exporta una empresa se distribuye según una distribución Normal de valor esperado 1,7 Kg y desviación típica de 100 gramos. El control de calidad de la empresa rechaza para su exportación aquellos productos cuyo peso difiera en más de 300 gramos del peso medio. En estas condiciones, ¿ cuál es la proporción de productos rechazados?

a) 90%
b) 99,74%
c) 0,26%
d) 95%

$X \sim N(\mu = 1700,\ \sigma = 100)$

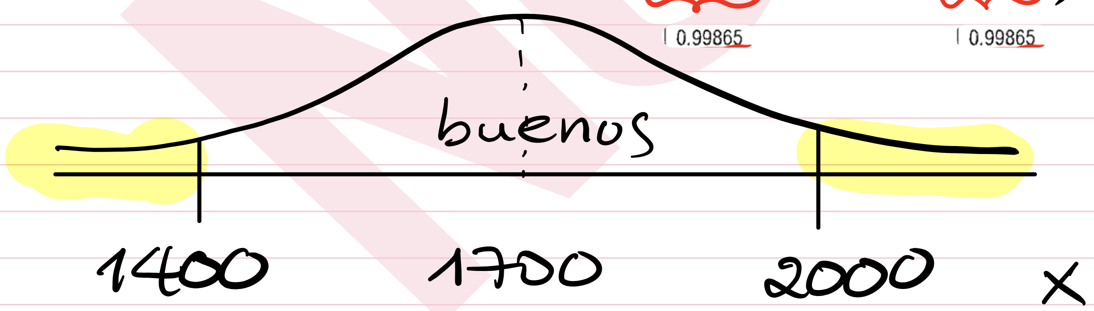


$$p(\text{buenos}) = p(1400 < x < 2000) =$$

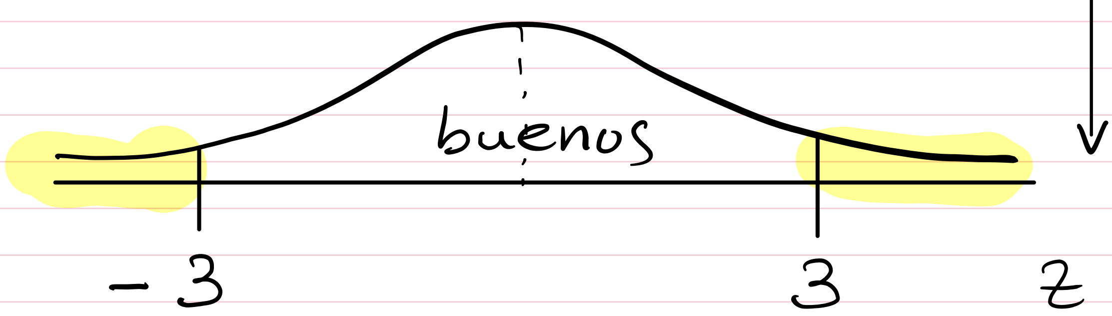
$$= p\left(\frac{1400-1700}{100} < z < \frac{2000-1700}{100}\right) =$$

$$= p(-3 < z < 3) = F(3) - F(-3) =$$

$$= \underbrace{F(3)}_{0.99865} - (1 - \underbrace{F(3)}_{0.99865}) = 0'9973$$



$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$



$F(-3)$

$F(3)$

$p(\text{rechazados}) = 1 - p(\text{buenos}) =$

$= 1 - 0'9973 = 0'0027$

$0'27\%$

c) V

V. 2

$$\left.\begin{array}{l} P(X < 1400) \\ p(X > 2000) \end{array}\right\} + \Rightarrow 0'27\%$$

V3

?

$X \sim N(\mu = \cancel{1700}, \sigma = 100)$

$p(\mu - 300 < x < \mu + 300) = p(\text{buenos}) =$

$= p\left(\frac{\cancel{\mu} - 300 - \cancel{\mu}}{100} < z < \frac{\cancel{\mu} + 300 - \cancel{\mu}}{100}\right) = p(-3 < z < 3) =$

$= F(3) - F(-3) = F(3) - (1 - F(3)) = 0'9973$

22. El tamaño de unas piezas sigue una distribución Normal (μ = 150, σ = 0,4). Si las piezas miden de 149,2 a 150,4 se consideran aceptables para su venta. Si se toman 50 piezas, ¿cuál es la probabilidad de que 48 sean aceptables?

a) 0,085
b) 0,003
c) 0,16
d) 1

X ~ piezas aceptables

$X \sim B(n = 50, p_{acept} = ?)$ 0'81859

$p(X = 48) = \binom{50}{48} 0'81859^{48} (1 - 0'81859)^2 =$

$= 0'00269 \simeq 0'003$

Y ~ long piezas

$Y \sim N(\mu = 150, \sigma = 0'4)$

$p(\text{aceptable}) = p(149'2 < x < 150'4) =$

$= p\left(\frac{149'2 - 150}{0'4} < z < \frac{150'4 - 150}{0'4} \right) =$

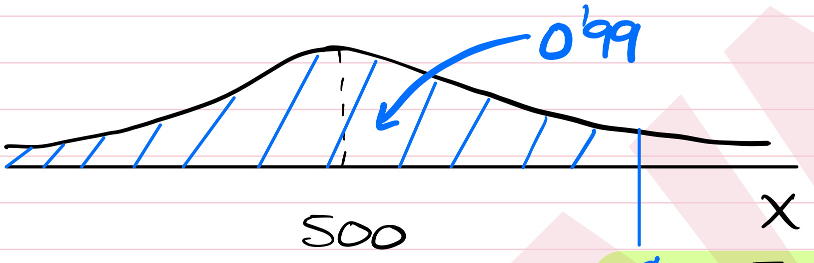
$= p(-1 < z < 2) = F(2) - F(-1) =$

$= \underbrace{F(2)}_{0.97725} - (1 - \underbrace{F(1)}_{0.84134}) = 0'81859$

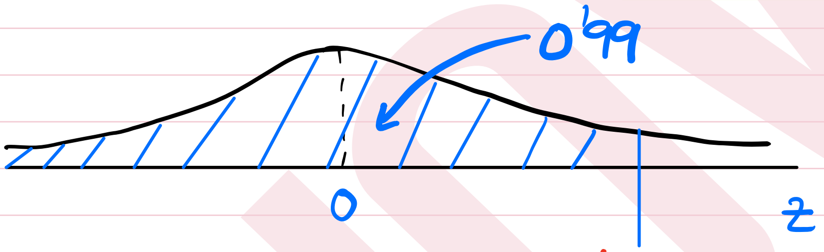
8. La demanda diaria de galletas de una empresa se distribuye como una Normal de valor esperado 500 kg y desviación estándar 12 Kg. ¿Cuál debe ser el nivel de producción de galletas para satisfacer el 99% de la demanda de la empresa?

a) 528
b) 724
c) 522
d) 531

$$X \sim N(\mu = 500, \sigma = 12)$$



$S = 527'84$



$F(z = ?) = 0'99$; $2'32$

$$z_S = \frac{S - 500}{12} = 2'32$$

$$\frac{S - 500}{12} = 2'32 \rightarrow S = 12 \cdot 2'32 + 500 = 527'84$$

a) ✓

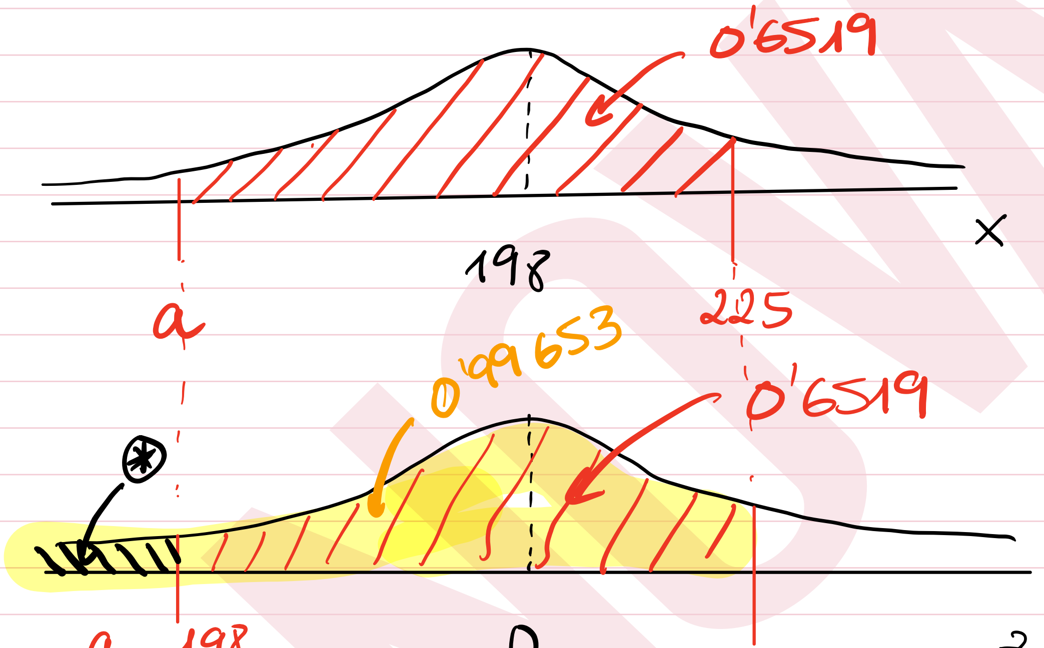
13. La fábrica de chocolate MINO tiene una máquina para envasar su chocolate en polvo, en bolsas de 200 gr. El peso de los envases, X, sigue una distribución Normal con media 198 gr. Y desviación 10 gr. ¿Cuál es el valor aproximado de “a” que verifica la siguiente relación?

$p(a \leq x \leq 225) = 0{,}6519$

a) 180
b) 171
c) ~~225~~
d) 194

$p(194 < x < 225) = \dots$

$X \sim N(\mu = 198, \sigma = 10)$



$z_a = \dfrac{a-198}{10} = -$

$z = \dfrac{225-198}{10} = 2'7$

✱ $0'99653 - 0'6519 = 0'34463$

$F(2'7) = 0'99653$

0.99653

$F\left(\dfrac{a-198}{10}\right) = 0'34463$

$F(z = -0'4) = 0'34463$

$\dfrac{a-198}{10} = -0'4$

$a = -0'4 \cdot 10 + 198 = 194$

$F(z = +0'4) = 1 - 0'34463 = 0'6553$

34. Una empresa dedicada a la comercialización de naranjas, vende parte de su producción al extranjero en bolsas de 5 Kg. El fabricante decide rechazar aquellas bolsas de naranjas cuyo peso difiera en más/menos de 200 gramos de la media. Si el peso de las naranjas se distribuye como una Normal de media 5 Kg y desviación estándar 0,2 Kg, la probabilidad de que elegida una bolsa al azar sea aceptada para la exportación es:

a) 20%
b) 32%
c) 80%
d) 68%

$$X \sim N(\mu = 5, \sigma = 0'2)$$

$$p(\text{aceptada}) = p(4'8 < X < 5'2) =$$

$$= p\left(\frac{4'8-5}{0'2} < Z < \frac{5'2-5}{0'2}\right) =$$

$$= p(-1 < Z < 1) = F(1) - F(-1) =$$

$$= \underbrace{F(1)}_{0.84134} - (1 - \underbrace{F(1)}_{0.84134}) = 0'6826$$

NOVA estudis BARCELONA

NOVA estudis BARCELONA
Carrer Joan Obiols 11-13
08034 Barcelona
www.novaestudis.com
Telf: 93 611 17 82
WhatsApp: 671 227 146