T2. OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES DE DESIGUALDAD

Este método se puede aplicar cuando tenemos un programa lineal (PL) con $n = 2$ variables:

$$(*)\begin{cases} \text{Optimizar} \ \ f(x,y) := c_1 x + c_2 y \\ \text{sujeta a} \quad \begin{cases} g_1(x,y) := a_{11}x + a_{12}y \le b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x,y) := a_{m1}x + a_{m2}y \le b_m, \end{cases} \end{cases}$$

y nos permite determinar los óptimos del programa dado (*) cuando el conjunto factible $F := \{(x,y) \in R^n \,|\, a_{11}x + a_{12}y \le b_1, \dots, a_{m1}x + a_{m2}y \le b_m\}$ es no vacío y acotado.

El método analítico consta de los siguientes pasos:

Paso 1: Dibujar el conjunto factible F (el cual es un polígono convexo y cerrado en R^n).

Paso 2: Hallar los vértices del conjunto factible F. (Para hallar un vértice –intersección de dos lados consecutivos de F – tenemos que resolver un sistema lineal de 2 ecuaciones y 2 incógnitas.)

Paso 3: Evaluar la función objetivo $f(x,y) := c_1 x + c_2 y$ en los vértices del conjunto factible F.

Conclusión:

(a) Si en un único vértice de F se alcanza el valor más grande (respectivamente, más pequeño) de la función objetivo sobre los vértices de F, entonces este vértice es el único máximo (respectivamente, mínimo) del PL.

(b) Si en dos vértices consecutivos de F se alcanza el valor más grande (respectivamente, más pequeño) de la función objetivo sobre los vértices de F, entonces cualquier punto del lado de F que une estos dos vértices es un máximo (respectivamente, mínimo) del PL.

Observación: El algoritmo del simplex (Dantzig, 1947) resuelve cualquier PL con un número arbitrario n de variables y m de restricciones. Este algoritmo está implementado en el programa Excel, para utilizarlo se hace mediante la función **Solver** de este programa. En el apartado **2.2.5** veremos que esta función del Excel nos da además un informe de sensibilidad del PL.

6. Un empresa de cosmètica fabrica dos tipus de perfums: Tipus I i tipus II. Cadascun d'ells conté dos elements bàsics A i B. En la següent taula es veu quina és la quantitat de cada element bàsic en l'elaboració d'1 gram de perfum i el benefici unitari per cada gram de perfum fabricat i venut.

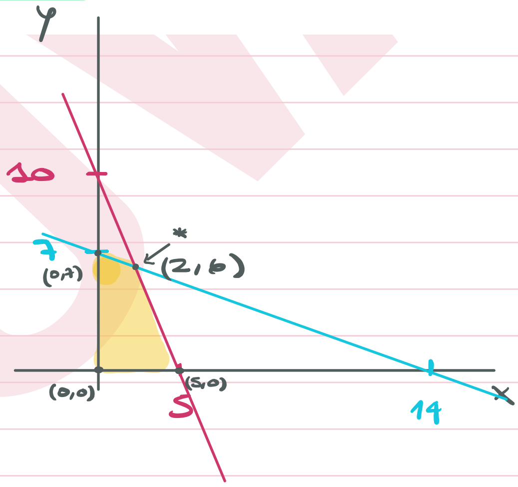
	Element A	Element B	Benefici unitari (€)
Perfum I	2 mg	4 mg	100
Perfum II	4 mg	2 mg	140

L'empresa disposa com a màxim de 28 mg de l'element A i 20 mg de l'element B. Els grams (x, y) de cada perfum a fabricar i vendre per tal de maximitzar els beneficis, és:

(a) $(0,0)$, **(b)** $(0,7)$,
(c) $(5,0)$, **(d)** $(2,6)$.

$B(x,y) = 100x + 140y$

$$\text{sa}: \begin{cases} 2x + 4y \leq 28 \\ 4x + 2y \leq 20 \end{cases}$$



$\cdot\ 2x + 4y = 28 \begin{cases} * x = 0 \rightarrow y = \frac{28}{4} = 7 \\ * y = 0 \rightarrow x = \frac{28}{2} = 14 \end{cases}$

$\cdot\ 4x + 2y = 20 \begin{cases} * x = 0 \rightarrow y = \frac{20}{2} = 10 \\ * y = 0 \rightarrow x = \frac{20}{4} = 5 \end{cases}$

$* \begin{cases} 2x + 4y = 28 \rightarrow y = \frac{28 - 2x}{4} \\ 4x + 2y = 20 \rightarrow y = \frac{20 - 4x}{2} \end{cases}$

$\frac{28 - 2x}{4} = \frac{20 - 4x}{2}$

$56 - 4x = 80 - 16x$

$16x - 4x = 80 - 56$

$12x = 24 \rightarrow x = \frac{24}{12} = 2$

$y = \frac{20 - 4 \cdot 2}{2} = 6$

$\cdot\ B(0,0) = 100 \cdot 0 + 140 \cdot 0 = 0$

$\cdot\ B(0,7) = 100 \cdot 0 + 140 \cdot 7 = 980$

$\cdot\ B(5,0) = 100 \cdot 5 = 500$

$\cdot\ B(2,6) = 100 \cdot 2 + 140 \cdot 6 = 1040$

EXAMEN MATEMÀTIQUES II (Grau ADE-Q2) 20/juny/2016 Model 33

<u>Enunciat de les preguntes 6 i 7</u>

Una empresa d'energia eòlica ha d'instal·lar x i y aerogeneradors en dues centrals A i B, respectivament. La potència, el cost i el benefici de cada aerogenerador, en funció de la central, ve donat per la següent taula:

	Ubicació A	Ubicació B
Potència	5 MW	3 MW
Cost	6 milions d'€	3 milions d'€
Benefici	3 milions d'€	2 milions d'€

L'empresa ha de satisfer una demanda mínima total de 120 MW, els costos no poden superar els 210 milions d'€ i el número mínim d'aerogeneradors que ha d'instal·lar en cada central és de 10.

6. El plantejament del problema que permet calcular la quantitat d'aerogeneradors que s'han d'instal·lar a cada central per maximitzar el benefici és:

(a)
$$\text{Màx } 3x+2y \qquad \text{s.a.} \begin{cases} 5x+3y \geq 120 \\ 6x+3y \leq 210 \\ x, y \geq 10 \end{cases}$$

~~(b)~~
$$\text{Màx } 3x+2y \qquad \text{s.a.} \begin{cases} 5x+3y \geq 120 \\ 6x+3y \leq 210 \\ x, \cancel{y \geq 0} \end{cases}$$

(c)
$$\text{Màx } 3x+2y \qquad \text{s.a.} \begin{cases} 5x+3y \cancel{\leq 120} \\ 6x+3y \geq 210 \\ x, y \geq 10 \end{cases}$$

~~(d)~~
$$\text{Màx } 3x+2y \qquad \text{s.a.} \begin{cases} 5x+3y \leq 10 \\ 6x+3y \geq 10 \\ x \geq 120, \cancel{y \geq 180} \end{cases}$$

7. Quina és la solució del problema?

(a) $x=30$ i $y=10$,

(b) $x=18$ i $y=10$,

(c) $x=10$ i $y=50$,

(d) el problema no té solució.

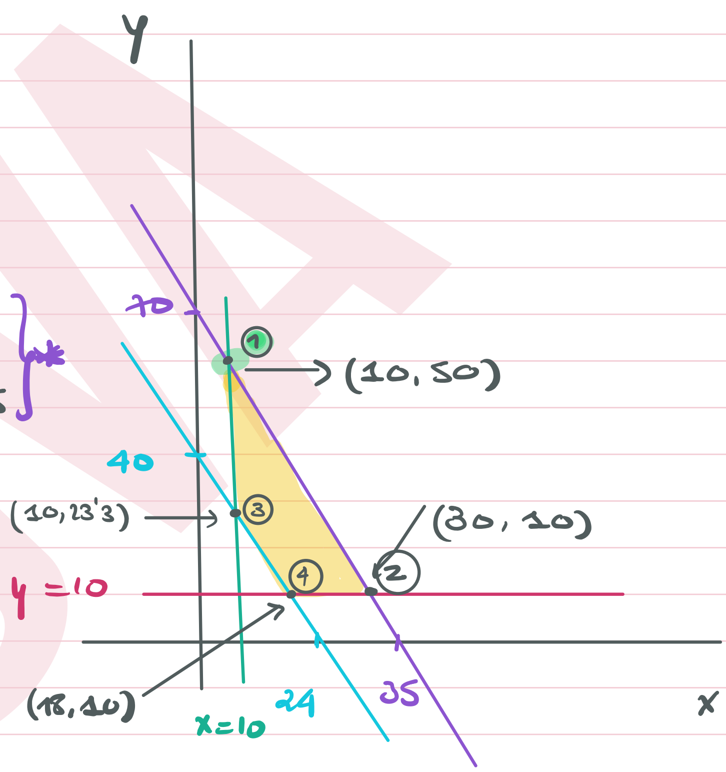
Màx $3x+2y$

$$\text{s.a.}\begin{cases} 5x+3y\geq 120 \\ 6x+3y\leq 210 \\ x,y\geq 10 \end{cases}$$

$5x+3y\geq120$ — $5x+3y=120$

$6x+3y\leq210$ — $6x+3y=210$

$x,y\geq10$ — $x=10$, $y=10$



- $5x+3y=120$ $\begin{cases} x=0 \rightarrow y=\frac{120}{3}=40 \\ y=0 \rightarrow x=\frac{120}{5}=24 \end{cases}$ ✱
- $6x+3y=210$ $\begin{cases} x=0 \rightarrow y=\frac{210}{3}=70 \\ y=0 \rightarrow x=\frac{210}{6}=35 \end{cases}$ ✱
- $x=10$ ✱
- $y=10$ ✱

① $\begin{cases} 6x+3y=210 \\ x=10 \end{cases}$ $6\cdot10+3y=210 \rightarrow 60+3y=210$

$y=\frac{210-60}{3}=50$

P(10, 50) $\longrightarrow$ $B^{o}=3\cdot10+2\cdot50=130$

② $\begin{cases} 6x+3y=210 \\ y=10 \end{cases}$ $6x+3\cdot10=210 \rightarrow x=\frac{210-30}{6}=30$

P(30, 10) $\longrightarrow$ $B^{o}=3\cdot30+2\cdot10=110$

③ $\begin{cases} 5x+3y=120 \\ x=10 \end{cases}$ $5\cdot10+3y=120$

$50+3y=120 \rightarrow y=\frac{120-50}{3}=23'3$

P(10, 23'3) $\longrightarrow$ $B^{o}=3\cdot10+2\cdot23'3=76'66$

④ $\begin{cases} 5x+3y=120 \\ y=10 \end{cases}$ $5x+3\cdot10=120 \rightarrow x=\frac{120-30}{5}=18$

P(18, 10) $\longrightarrow$ $B^{o}=3\cdot18+2\cdot10=74$

MATEMÀTIQUES II (Grau ADE-Q1) 15/gener/2016 Model 11

Enunciat de les preguntes 6 i 7

Una fàbrica d'accessoris d'informàtica produeix ratolins per PC (mouse) i USBs. Per produir cada unitat, tant de mouse com de USB, el producte ha de passar per la secció de muntatge (on s'acoblen els diferents components del producte final) i per la secció de control de qualitat (on es comprova el correcte funcionament del producte).
Un mouse per a PC necessita 20 minuts de treball de la secció de muntatge i 4 minuts de treball de la secció de control de qualitat. Un USB necessita 10 minuts de treball de la secció de muntatge i 1 minut de treball de la secció de control de qualitat. Aquesta fàbrica disposa de 10 hores de treball al dia de la secció de muntatge i de 2 hores al dia de la secció de control de qualitat.
L'empresa guanya 15€ per cada mouse produït i venut i 3€ per cada USB produït i venut.

6. La producció òptima diària de l'empresa que maximitza el benefici és de :

(a) 30 mouse per PC i cap USB, **(b)** 30 USBs i cap mouse per PC,

(c) 10 mouse per PC i 10 USBs, **(d)** 10 mouse per PC i 20 USBs.

7. Suposeu que l'empresa es planteja augmentar la capacitat de treball de la secció de control de qualitat en 1 hora més al dia. En aquest cas, l'augment previsible dels beneficis diaris de l'empresa és de:

(a) 15€, **(b)** 50€, **(c)** 60€, **(d)** Els beneficis no augmentaran.

x – mouse
y – usb

10 horas → 600 min
2 horas → 120 min

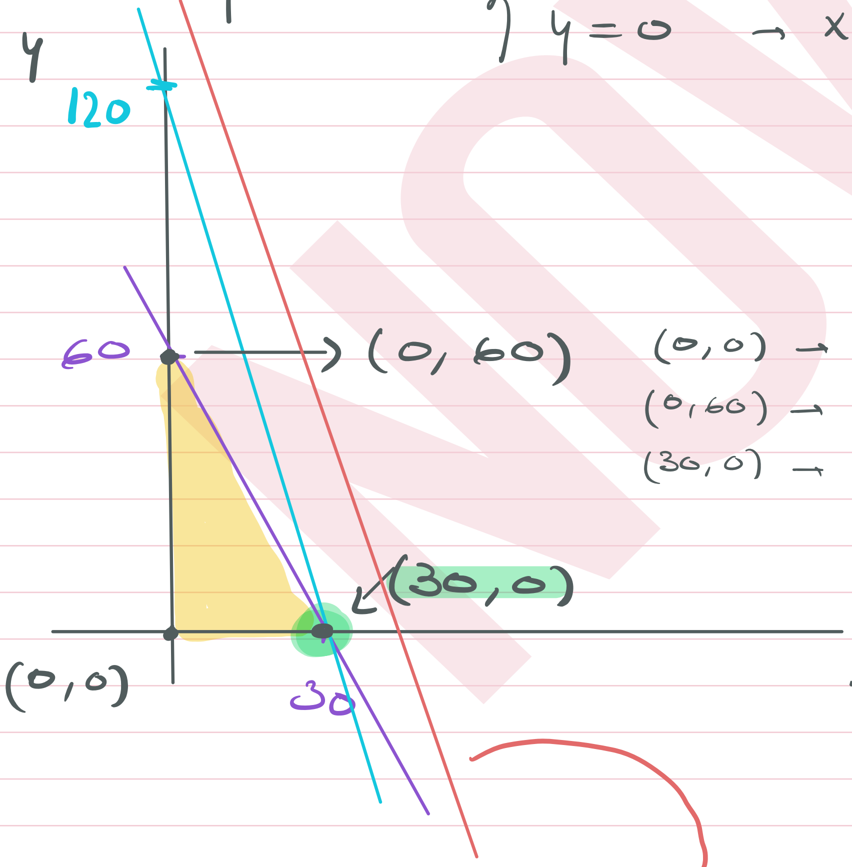
6. $B(x,y) = 15x + 3y$

$s.a: \; 20x + 10y \leq 600$

$4x + y \leq 120$

• $20x + 10y = 600 \left\{ \begin{array}{l} x=0 \rightarrow y = \frac{600}{10} = 60 \\ y=0 \rightarrow x = \frac{600}{20} = 30 \end{array} \right\} *$

• $4x + y = 120 \left\{ \begin{array}{l} x=0 \rightarrow y = 120 \\ y=0 \rightarrow x = \frac{120}{4} = 30 \end{array} \right\} *$



$(0,0) \rightarrow B^{o} = 0$

$(0,60) \rightarrow B^{o} = 15 \cdot 0 + 3 \cdot 60 = 180$

$(30,0) \rightarrow B^{o} = 15 \cdot 30 + 3 \cdot 0 = 450$

7. $4x + y \leq 180$

$4x + y = 180 \left\{ \begin{array}{l} x=0 \rightarrow y = 180 \\ y=0 \rightarrow x = \frac{180}{4} = 45 \end{array} \right.$

ANÁLISIS SENSIBILIDAD

Ejemplo: PL $\begin{cases} \text{Maximizar} \quad B(x,y) = 55x + 30y \\ \text{sujeta a :} \quad \begin{cases} 4x + 2y \le 4.000, \\ 3x + 3y \le 4.500, \\ x, y \ge 0. \end{cases} \end{cases}$

A continuación, mostramos en este ejemplo el informe de sensibilidad obtenido haciendo uso de la función **Solver** del programa Excel (esta función se encuentra disponible en el menú Datos del Excel).

Maximizar	$B(x,y) = 55x + 30y$
sujeto a:	$4x + 2y \le 4.000$
	$3x + 3y \le 4.500$
	$x \ge 0,\ y \ge 0$

Variables	***x***	***y***		
Valor variables	500	1000		
Coeficientes	55	30	**Función objetivo**	57500

Restricciones			**Lado izquierdo (recurso asignado)**		**Lado derecho (recurso disponible)**
Madera (m.)	4	2	4000	<=	4000
Trabajo (h.)	3	3	4500	<=	4500

Microsoft Excel 16.0 Informe de sensibilidad

Celdas de variables

Celda	**Nombre**	**Final Valor** x_i^*	**Reducido Coste**	**Objetivo Coeficiente** c_i	**Permisible Aumentar** ε_i	**Permisible Reducir** ε_i'
B10	Valor variables x	500	0	55	5	25
C10	Valor variables y	1000	0	30	25	2,5

Restricciones

Celda	**Nombre**	**Final Valor**	**Sombra Precio** λ_j^*	**Restricción Lado derecho** b_j	**Permisible Aumentar** δ_j	**Permisible Reducir** δ_j'
D14	Madera	4000	12,5	4000	2000	1000
D15	Trabajo	4500	1,666666667	4500	1500	1500

Pregunta 1: ¿Cómo variaría el valor máximo si la segunda restricción fuese $3x+3y\leq 5.000$ (dejando el resto de restricciones y la función objetivo sin cambiar)?

Mirando en el informe de sensibilidad anterior (en el apartado de "Restricciones") la fila correspondiente a la segunda restricción vemos que el precio sombra $\lambda_2^*=1{,}666666667$, el aumento permisible del término independiente $b_2=4.500$ es $\delta_2=1.500$ y su reducción permisible es $\delta_2'=1.500$.

Si la segunda restricción fuese $3x+3y\leq 5.000$, entonces la variación de b_2 sería $\Delta b_2=5.000-4.500=500\leq\delta_2$ y, por tanto, la variación del valor máximo sería igual a $\lambda_2^*\cdot\Delta b_2=1{,}666666667\cdot 500=833{,}33$ (en otras palabras, el nuevo valor máximo sería igual a $57.500+833{,}33=58.333{,}33$).

Pregunta 2: ¿Cómo variaría el máximo y el valor máximo si la función objetivo fuese $55x+28y$ (dejando las restricciones sin cambiar)?

Mirando en el informe de sensibilidad anterior (en el apartado de "Celdas cambiantes") la fila correspondiente a la segunda variable, y, de la función objetivo vemos que el aumento permisible del coeficiente $c_2=30$ es $\varepsilon_2=25$ y su reducción permisible es $\varepsilon_2'=2{,}5$.

Si la función objetivo fuese $55x+28y$, entonces la variación de c_2 sería $\Delta c_2=28-30=-2\geq-\varepsilon_2'$ y, por tanto, el máximo seguiría siendo el punto $(x^*,y^*)=(500,1.000)$ y la variación del valor máximo sería igual a $\Delta c_2\cdot y^*=-2\cdot 1.000=-2.000$ (en otras palabras, el nuevo valor máximo sería igual a $57.500-2.000=55.500$).

NOVA estudis BARCELONA

NOVA estudis BARCELONA

NOVA estudis BARCELONA
Carrer Joan Obiols 11-13
08034 Barcelona
www.novaestudis.com
Telf: 93 611 17 82
WhatsApp: 671 227 146