T1. OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES DE IGUALDAD

1.1 Planteamiento formal del problema.

Consideramos el problema lagrangiano (PL) siguiente:

$$\text{PL}\begin{cases}\text{Optimizar } f(\overset{\mathbb{R}^n}{x}) \begin{array}{l}\text{min}\\ \text{max}\end{array} \\ \text{sujeta a } \underbrace{\begin{cases} g_1(x)=b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x)=b_m, \end{cases}}_{\text{nº restricciones } = m}\end{cases}$$

Observación: Nuestro objetivo en este tema es dar a conocer las principales técnicas que permiten resolver un PL dado. Durante este tema veremos tres métodos de resolución de un PL:

- Método directo (se puede aplicar cuando podemos parametrizar el conjunto factible F),
- Método gráfico (se puede aplicar cuando $n=2$ y $m=1$),
- Método de Lagrange (se puede aplicar siempre).

1.2 Método Directo

Este método se puede aplicar en el caso en que podamos *parametrizar* el conjunto factible $F := \{(x_1,\ldots,x_n) \in A \mid g_1(x_1,\ldots,x_n) = b_1,\ldots,g_m(x_1,\ldots,x_n) = b_m\}$ del PL; es decir, si en el sistema de m ecuaciones y n incógnitas dado por las m restricciones del PL podemos despejar (globalmente) m de las incógnitas, $x_{i_1},\ldots,x_{i_m}$, en función de las $n-m$ incógnitas restantes $x_{i_{m+1}},\ldots,x_{i_n}$ (que actúan entonces como parámetros):

$$(*)\begin{cases} x_{i_1} = G_1(x_{i_{m+1}},\ldots,x_{i_n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{i_m} = G_m(x_{i_{m+1}},\ldots,x_{i_n}). \end{cases}$$

En este caso, el PL es equivalente al problema de optimizar (de forma libre –ver la asignatura de Matemáticas I–) la función $h(x_{i_{m+1}},\ldots,x_{i_n})$ obtenida al substituir en la función $f(x_1,\ldots,x_n)$ las incógnitas $x_{i_1},\ldots,x_{i_m}$ por las expresiones dadas en (*):

$$h(x_{i_{m+1}},\ldots,x_{i_n}) = f(x_1,\ldots,x_n)\big|_{(*)}.$$

Ejemplos. Resolver los PL siguientes utilizando el método directo:

1. $\begin{cases} \text{Maximizar} & f(x,y) := xy \\ \text{sujeta a} & 2x + y = 100. \end{cases}$ $\longrightarrow$ $y = 100 - 2x$

$h(x) = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$

$h'(x) = 100 - 2\cdot 2x = 100 - 4x = 0$

$100 - 4x = 0 \rightarrow 4x = 100 \rightarrow x = \frac{100}{4} = 25$

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ x = 25 \\ \cdot\ y = 100 - 2\cdot 25 = 100 - 50 = 50 \end{array}\right\} P(25, 50)$

$h''(x) = -4 < 0 \rightarrow P(25,50)$ es un Máximo

$f(25,50) = 25\cdot 50 = 1.250$

MATEMÀTIQUES II (Grau ADE-Q2) 20/juny/2016 Model 33

Enunciat de les preguntes 2 i 3

Donat el següent problema matemàtic d'optimització amb una restricció d'igualtat:

$$Opt\, f(x,y) = x^2 + 2y^2$$
$$\text{s.a. } x + y = 1$$

2. Llavors, es pot afirmar que el problema:

(a) té un mínim condicionat, **(b)** té un màxim condicionat,
(c) té un punt màxim i un punt mínim, **(d)** no té cap punt òptim.

3. En el problema matemàtic d'optimització enunciat, es verifica que:

(a) el valor màxim de $f(x,y)$ és igual a $\frac{4}{3}$, **(b)** el valor màxim de $f(x,y)$ és igual a $\frac{2}{3}$,
(c) el valor mínim de $f(x,y)$ és igual a $\frac{2}{3}$, **(d)** cap de les anteriors afirmacions és certa.

2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2$

s.a : $x + y = 1 \longrightarrow y = 1 - x$

$h(x) = x^2 + 2(1-x)^2 = x^2 + 2(1 + x^2 - 2x) =$

$= x^2 + 2 + 2x^2 - 4x = 3x^2 - 4x + 2$

$h'(x) = 3 \cdot 2x - 4 = 6x - 4 = 0 \rightarrow 6x = 4$

$x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{2}{3} \\ y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3} \end{array}\right\} P(2/3, 1/3)$$

$h''(x) = 6 > 0 \rightarrow P(2/3, 1/3)$ es un mínimo

3. $f(2/3, 1/3) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ //

MATEMÀTIQUES II (Grau ADE-Q2) 20/juny/2016 Model 11

2. Donat el problema d'optimització (aconsellem resoldre'l pel mètode directe):

$$\text{Mín. } f(x,y,z)=x^2-y^2+z^2+xy-20x+6z$$
$$\text{s.a. } x-2y=0$$

El punt on el problema assoleix el mínim és:

(a) $(x=0, y=0, z=0)$, **(b)** $(x=8, y=4, z=-3)$,
(c) $(x=2, y=1, z=0)$, **(d)** cap dels anteriors.

s.a $x=2y$

$f(y,z)=(2y)^2-y^2+z^2+2y\,y-20(2y)+6z=$
$=4y^2-y^2+z^2+2y^2-40y+6z=$
$=5y^2-40y+z^2+6z$

- $f'_y=10y-40=0 \to 10y=40 \to y=\frac{40}{10}=4$
- $f'_z=2z+6=0 \to 2z=-6 \to z=\frac{-6}{2}=-3$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ x=2y=2\cdot 4=8 \\ \bullet\ y=4 \\ \bullet\ z=-3 \end{array}\right\} P(8,4,-3) \longrightarrow \text{mínimo}$$

$H=\begin{pmatrix} f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$ $f''_{yy}=10$ $f''_{yz}=0$ $f''_{zy}=0$ $f''_{zz}=2$

$H=\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} |H|=h_2=20>0 \\ h_1=f''_{yy}=10>0 \end{array}\right\}$ Definida +

$h_2>0$	$h_1=f''_{x^2}<0$	Máximo relativo
	$h_1=f''_{x^2}>0$	Mínimo relativo
$h_2=0$	Caso dudoso. Donde no llega a ninguna conclusión	
$h_2<0$	Punto de silla. No hay extremo	

Definida negativa
Definida positiva

$h_2>0$	$h_1=f''_{x^2}<0$	Máximo relativo	Def. negativa
	$h_1=f''_{x^2}>0$	Mínimo relativo	Def. positiva
$h_2=0$	Caso dudoso. Donde no llega a ninguna conclusión		
$h_2<0$	Punto de silla. No hay extremo		

MATEMÀTIQUES II (Grau ADE-Q1) 15/gener/2016 Model 11

2. Donat el programa següent (aconsellem resoldre'l pel mètode directe):

$$Opt.\ f(x,y,z)=2x^2-3y^2-4z^2$$
$$s.a.\quad x+z=1$$

(a) No té solució: ni màxim, ni mínim.

(b) Té dos òptims.

(c) Té un màxim condicionat o restringit en el punt $(2,0,-1)$.

(d) El punt $(2,0)$ és un mínim relatiu.

$s.a \rightarrow z = 1-x$

$f(x,y) = 2x^2-3y^2-4(1-x)^2 = 2x^2-3y^2-4(1+x^2-2x) =$

$= 2x^2-3y^2-4-4x^2+8x = -2x^2+8x-3y^2-4$

$f'x = -2\cdot 2x+8 = -4x+8 = 0 \rightarrow 4x=8 \rightarrow x=\frac{8}{4}=2$

$f'y = -3\cdot 2y = -6y = 0 \rightarrow y=0$

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ x=2 \\ \cdot\ y=0 \\ \cdot\ z=1-2=-1 \end{array}\right\}$ $P(2,0,-1) \longrightarrow$ Máximo

$f''xx=-4$ $\quad f''xy=0$ $\quad H=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -6\end{pmatrix}$

$f''yx=0$ $\quad f''yy=-6$

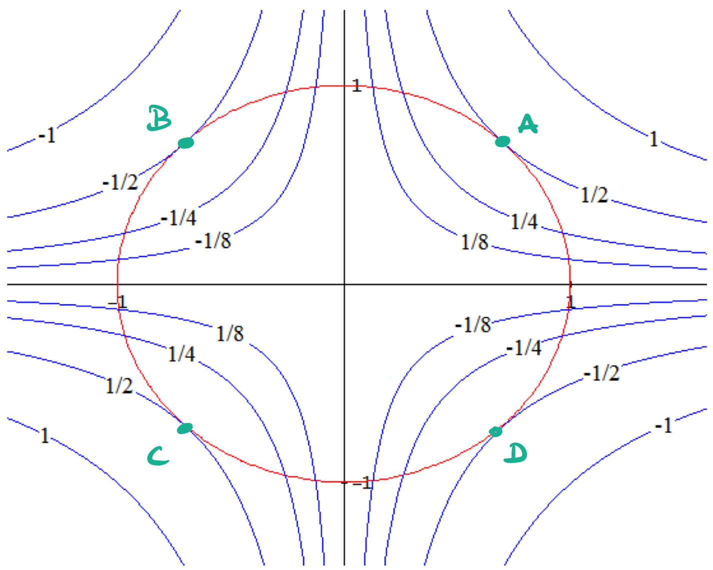
$\left.\begin{array}{l} |H| = h_2 = 24 > 0 \\ h_1 = -4 < 0 \end{array}\right\}$ Def. negativa $\rightarrow$ Máximo

1.3 Método Gráfico

Este método se puede aplicar cuando $n=2$ y $m=1$:

$$\text{PL}\begin{cases}\text{Optimizar} & f(x,y)\\ \text{sujeta a} & g(x,y)=b,\end{cases}$$

y nos permite determinar el número de óptimos del PL dado a partir de los dibujos del conjunto factible $F:=\{(x,y)\in A \mid g(x,y)=b\}$ y de las curvas de nivel $k\in R$ de la función objetivo $f(x,y)$ (es decir, de las curvas con ecuación $f(x,y)=k$, con $k\in R$). En los puntos de tangencia de una curva de nivel con el conjunto factible se encontrarán los óptimos del PL. Sin embargo, este método gráfico no nos da los óptimos del PL.



Conjunto factible: $x^2+y^2=1$; curvas de nivel: $xy=k$ ($k=\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 1/8$).

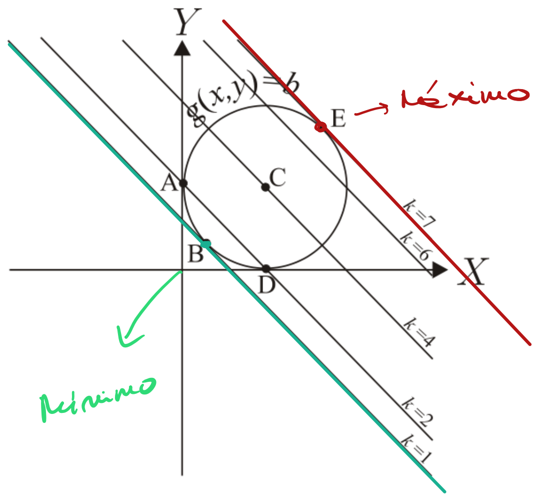
Con la ayuda de la Figura 1.2 vemos que el PL tiene exactamente dos máximos (uno en el primer cuadrante y otro en el tercero) y dos mínimos (uno en el segundo cuadrante y otro en el cuarto). No obstante, este método gráfico no nos da los máximos ni los mínimos del PL.

EXAMEN MATEMÀTIQUES II **(Grau ADE-Q2)** **20/juny/2016** **Model 11**

1. Donat un problema d'optimització amb una restricció d'igualtat:

$$\text{Opt. } f(x,y)$$
$$\text{s.a. } g(x,y)=b,$$

el següent dibuix mostra la representació gràfica de la restricció $g(x,y)=b$ i d'algunes corbes de nivell de la funció objectiu pels valors k = 1, 2, ,4, 6 i 7:



Aleshores, podem afirmar que el valor mínim condicionat de la funció objectiu s'assoleix en:

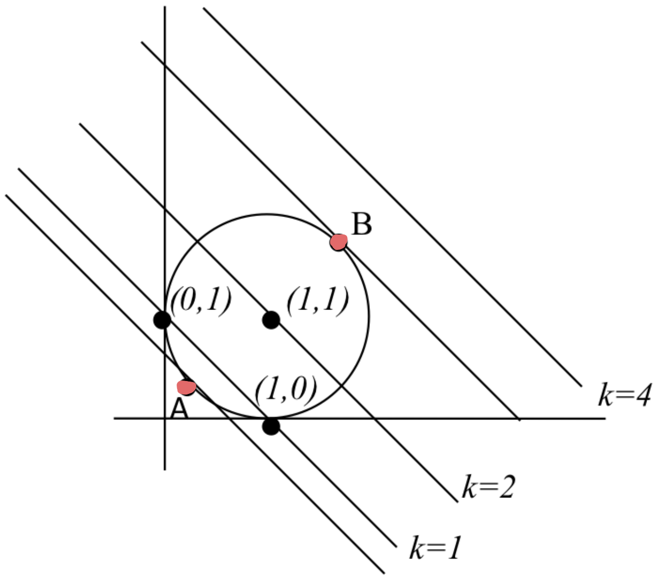
(a) els punt A i D,
(b) el punt B,
(c) el punt C,
(d) el punt E.

MATEMÀTIQUES II **(Grau ADE-Q1)** **15/gener/2016** **Model 11**

1. Donat el problema d'optimització amb una restricció d'igualtat:

$$\text{Opt. } f(x,y) = x + y$$
$$\text{s.a. } (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

el dibuix següent mostra la representació gràfica de la restricció i d'algunes corbes de nivell de la funció objectiu, C_k:



Quina de les següents afirmacions és correcta?

(a) La funció objectiu assoleix el seu únic mínim condicionat al punt *A*.
(b) La funció objectiu assoleix dos únics mínims condicionats als punts $(0,1)$ i $(1,0)$.
(c) La funció objectiu assoleix el seu únic mínim condicionat al punt $(1,1)$.
(d) La funció objectiu assoleix el seu únic ~~mín~~im condicionat al punt B.

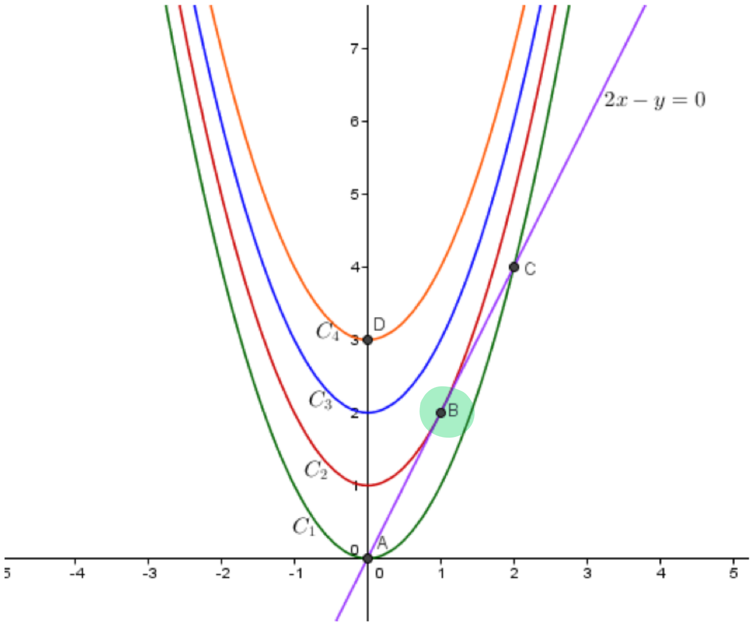
EXAMEN MATEMÀTIQUES II **(Grau ADE-Q2)** **20/juny/2016** **Model 33**

Cognoms ________________________________ **Nom** ________________________

1. Considerem el següent problema de maximització amb una restricció d'igualtat:

$$\text{Màx. } f(x,y)$$
$$\text{s.a. } 2x-y=0$$

El següent dibuix mostra la representació gràfica de la restricció i de les corbes de nivell $C_k=\{(x,y):f(x,y)=k\}$ de la funció objectiu f per $k=1, k=2, k=3$ i $k=4$:



Aleshores, podem afirmar que el valor màxim condicionat de la funció objectiu s'assoleix en:

(a) el punt A, **(b)** el punt B,
(c) el punt C, **(d)** el punt D.

NOVA estudis BARCELONA
Carrer Joan Obiols 11-13
08034 Barcelona
www.novaestudis.com
Telf: 93 611 17 82
WhatsApp: 671 227 146

1.3 MÉTODO DE LAGRANGE

Este método consta de los siguientes pasos:

Paso 0. Escribir la función lagrangiana asociada a nuestro PL:

$$L(x,\lambda):=f(x)-\lambda_1\cdot(g_1(x)-b_1)-\ldots-\lambda_m\cdot(g_m(x)-b_m),$$

donde $x:=(x_1,\ldots,x_n)$ y $\lambda:=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$.

Paso 1. Hallar los puntos estacionarios de la función lagrangiana $L(x,\lambda)$. Así, los puntos formados por las n primeras coordenadas de estos puntos estacionarios son los únicos candidatos a resolver el PL.

Paso 2. Clasificar cada uno de los candidatos obtenidos en el paso 1, utilizando para ello las condiciones suficientes de segundo orden local o global de abajo.

Condición suficiente de segundo orden local

Supongamos que $(a,\lambda^*):=(a_1,\ldots,a_n,\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^*)$ es un punto estacionario de la función lagrangiana $L(x,\lambda)$ asociada a nuestro PL y que el rango de la matriz Jacobiana $Jg(a):=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}$ es igual a m. Consideramos la matriz hessiana, respecto de las variables $x:=(x_1,\ldots,x_n)$ de la función lagrangiana anterior:

$$H_xL(x,\lambda):=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^{\,2}} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^{\,2}}\end{pmatrix}.$$

(a) Si la forma cuadrática con matriz asociada $H_xL(a,\lambda^*)$ es definida positiva, entonces a es un mínimo local del PL.

(b) Si la forma cuadrática con matriz asociada $H_xL(a,\lambda^*)$ es definida negativa, entonces a es un máximo local del PL.

(c) Supongamos que la forma cuadrática con matriz asociada $H_xL(a,\lambda^*)$ es indefinida. Consideramos el subespacio de *direcciones factibles* definido por $S=\{x\in R^n \mid Jg(a)\cdot x^t=0\}$.

(c1) Si la forma cuadrática con matriz asociada $H_xL(a,\lambda^*)$ restringida a S es definida positiva, entonces a es un mínimo local del PL.

(c2) Si la forma cuadrática con matriz asociada $H_xL(a,\lambda^*)$ restringida a S es definida negativa, entonces a es un máximo local del PL.

Interpretación económica de los multiplicadores de Lagrange

Nos planteamos como variaría el valor óptimo de nuestro PL si variásemos ligeramente los términos independientes de las restricciones $b_1, \ldots, b_m$, permaneciendo fijos el resto de datos del PL (la función objetivo $f(x)$ y los primeros miembros de las restricciones $g_1(x), \ldots, g_m(x)$).

Sea $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ un óptimo de nuestro PL, con multiplicadores de Lagrange asociados $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$. Así, cada $x_i^* = x_i^*(b)$ ($i = 1, \ldots, n$) y cada $\lambda_j^* = \lambda_j^*(b)$ ($j = 1, \ldots, m$) dependen de $b := (b_1, \ldots, b_m)$. Por tanto, el valor óptimo del PL $V(b) := f(x_1^*(b), \ldots, x_n^*(b))$ también depende de b.

Entonces la variación del valor óptimo es:

$$\Delta V(b) := V(b + \Delta b) - V(b) \approx \lambda_1^*(b) \cdot \Delta b_1 + \cdots + \lambda_m^*(b) \cdot \Delta b_m = \lambda^*(b) \cdot \Delta b$$

donde $\Delta b := (\Delta b_1, \ldots, \Delta b_m)$ y cada Δb_j representa una variación "pequeña" en valor absoluto de b_j; en otras palabras, $V(b + \Delta b) \approx V(b) + \lambda^*(b) \cdot \Delta b$.

$\lambda > 0 \Rightarrow \Delta 1 \Rightarrow \Delta 1 \cdot \lambda$ el óptimo

$\lambda < 0 \Rightarrow \Delta 1 \Rightarrow \nabla 1 \cdot \lambda$ el óptimo

Enunciat de les preguntes 4 i 5

La funció de producció d'un article a partir dels factors productius x i y és $q(x,y)=40x+120y-x^2-12y^2$. Els preus unitaris dels factors x i y són $p_x=1$ € i $p_y=4$ €. El pressupost destinat als factors de producció es de 33 € i es vol gastar en la seva totalitat. Es vol determinar les quantitats x i y que maximitzen la producció.

4. El punt $(x,y;\lambda)$ que satisfà la condició necessària d'òptim de la funció de Lagrange és:

(a) $(21,3;-2)$, **(b)** $(17,4;6)$,
(c) $(13,5;14)$, **(d)** cap de les anteriors.

$$\text{Max: } q(x,y)=40x+120y-x^2-12y^2$$
$$\text{s.a}: 1\cdot x+4y=33 \rightarrow x+4y-33=0$$

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=40x+120y-x^2-12y^2-\lambda(x+4y-33)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=40-2x-\lambda=0 \rightarrow \lambda=40-2x$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}=120-12\cdot 2y-4\lambda=120-24y-4\lambda=0 \rightarrow \lambda=\frac{120-24y}{4}=30-6y$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda}=-(x+4y-33)=-x-4y+33=0$$

$$* \; 40-2x=30-6y \rightarrow -2x=30-6y-40$$
$$+2x=+10+6y \rightarrow x=\frac{10+6y}{2}=5+3y$$

$$\begin{cases} x=5+3y \\ -x-4y+33=0 \end{cases} \quad -5-3y-4y+33=0$$
$$+7y=+28 \rightarrow y=\frac{28}{7}=4$$
$$x=5+3\cdot 4=17$$
$$\lambda=40-2\cdot 17=6$$
$$P(17,4,6)$$

5. Si el pressupost destinat als factors productius s'augmenta en 1€, la variació de la producció màxima:

(a) augmentarà, aproximadament, en 6 unitats,
(b) disminuirà, aproximadament, en 14 unitats,
(c) disminuirà, aproximadament, en 6 unitats,
(d) augmentarà, aproximadament, en 2 unitats.

$\lambda = 6 \rightarrow \Delta 1 \Rightarrow \Delta 1 \cdot \lambda \Rightarrow \Delta 1 \cdot 6 \Rightarrow \Delta 6$

MATEMÀTIQUES II (Grau ADE-Q2) 20/juny/2016 Model 11

Enunciat de les preguntes 3, 4 i 5

La funció de beneficis d'una empresa que comercialitza dos productes A i B, ve determinada per $B(x,y)=80x+4y-300$, essent x i y el número d'unitats a produir i vendre dels productes A i B respectivament.

Si l'objectiu de l'empresa és maximitzar els beneficis havent de complir la restricció $x^2+y=150$, es demana:

3. El número d'unitats a produir i vendre de cadascun dels productes A i B, per tal de maximitzar els beneficis subjectes a la restricció enunciada és:

(a) $x=28$ i $y=635$,
(b) $x=9$ i $y=69$,
(c) $x=10,$ $y=50$,
(d) no hi ha màxim.

4. Si la restricció del problema passa a ser $x^2+y=151$, llavors el valor òptim de la funció:

(a) augmentarà en 1 unitat,
(b) disminuirà en 4 unitats,
(c) augmentarà en 4 unitats,
(d) disminuirà en 1 unitat.

5. El gradient de la restricció avaluat en el punt crític o estacionari del problema és:

(a) $(1,1)$,
(b) $(20,1)$,
(c) $(56,1)$,
(d) $(18,1)$.

MÉT DIRECTO $B(x,y)=80x+4y-300$ s.a: $x^2+y=150$

$y=150-x^2 \rightarrow B(x)=80x+4(150-x^2)-300=$
$=80x+600-4x^2-300=80x-4x^2+300$

$B'(x)=80-8x=0 \rightarrow x=10 \rightarrow y=150-10^2=50$

$B''(x)=-8<0 \longrightarrow P(10,50)$ es un Máximo

3. $B(x,y) = 80x + 4y - 300$

$s.a.: \; x^2 + y = 150 \longrightarrow x^2 + y - 150 = 0$

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 80x + 4y - 300 - \lambda(x^2 + y - 150)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 80 - 2x\lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= 4 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= -x^2 - y + 150 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$\rightarrow 80 - 2x \cdot 4 = 0$

$80 - 8x = 0 \rightarrow x = \frac{80}{8} = 10$

$\rightarrow \lambda = 4$

$\rightarrow -10^2 - y + 150 = 0$

$-100 - y + 150 = 0$

$-y + 50 = 0 \quad y = 50$

$$\left.\begin{aligned} x &= 10 \\ y &= 50 \\ \lambda &= 4 \end{aligned}\right\} \; P(\overset{x}{10}, \overset{y}{50}, \overset{\lambda}{4})$$

4. $\lambda = 4 \Rightarrow \Delta 1 \Rightarrow \Delta 1 \cdot \lambda \Rightarrow \Delta 1 \cdot 4 \Rightarrow \Delta 4$ unitats

5. $\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right)$

$$\nabla g = (2x, 1) \xrightarrow{(10,50)} (20, 1)$$

EXAMEN MATEMÀTIQUES II (Grau ADE-Q1) 15/gener/2016 Model 11

Enunciat de les preguntes 3 , 4 i 5

Els beneficis de l'empresa V que obté al comercialitzar els productes A i B, vénen determinats per $B(x,y)=2x+4y$, essent x i y el número d'unitats a fabricar i vendre dels productes A i B respectivament.

Si l'objectiu de l'empresa és maximitzar els beneficis havent de complir la restricció $x^2+4y^2=800$, es demana:

3. El número d'unitats a fabricar i vendre de cadascun dels productes A i B, per tal de maximitzar el beneficis subjectes a la restricció enunciada és:

(a) $x=20, \quad y=10,$ **(b)** $x=10, \quad y=20,$

(c) $x=\pm 20, \quad y=\pm 10,$ **(d)** $x=\pm 10, \quad y=\pm 20.$

4. El gradient de la restricció que permet calcular el vector de la direcció factible o permesa és:

(a) $(20,160),$ **(b)** $(40,80),$

(c) $(80,40),$ **(d)** $(100,1600).$

5. Si la restricció del problema passa a ser $x^2+4y^2=810$, llavors el valor òptim de la funció:

(a) augmentarà, aproximadament, en 0'5 unitats,
(b) disminuirà, aproximadament, en 5 unitats,
(c) augmentarà, aproximadament, en 2 unitats,
(d) disminuirà, aproximadament, en 0'5 unitats.

3. $B(x,y) = 2x + 4y$

$$S.a: \; x^2 + 4y^2 = 800 \longrightarrow x^2 + 4y^2 - 800 = 0$$

$$L(x,y,\lambda) = 2x + 4y - \lambda(x^2 + 4y^2 - 800)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2 - 2x\lambda = 0 \longrightarrow \lambda = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x} \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y} = 4 - 8y\lambda = 0 \longrightarrow \lambda = \dfrac{4}{8y} = \dfrac{1}{2y} \end{array}\right\} *$$

$$\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -x^2 - 4y^2 + 800 = 0$$

$$* \; \frac{1}{x} = \frac{1}{2y} \rightarrow 2y = x \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2y \\ -x^2 - 4y^2 + 800 = 0 \end{array}\right\} \; -(2y)^2 - 4y^2 + 800 = 0$$

$$-4y^2 - 4y^2 + 800 = 0$$

$$+8y^2 = +800$$

$$y^2 = 100 \rightarrow y = \sqrt{100}$$

$$y = \pm 10$$

$$\left\{\begin{array}{l} y = +10 \\ x = 2 \cdot 10 = 20 \\ \lambda = \dfrac{1}{20} = 0'05 \end{array}\right\} P(20, 10, 0'05)$$

4. $\nabla g = (2x, 8y) \xrightarrow{(20,10)} (2 \cdot 20, 8 \cdot 10) = (40, 80)$

5. $\lambda = 0'05 \quad \Delta 10 \Rightarrow \Delta 10 \cdot \lambda$

$$\Delta 10 \cdot 0'05 \Rightarrow \Delta 0'5$$

NOVA estudis BARCELONA