T5. TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

5.1 INTRODUCCIÓN

En la vida cotidiana aparecen muchas situaciones en las que los resultados observados son diferentes aunque las condiciones iniciales en las que se produce la experiencia sean las mismas. Por ejemplo, al lanzar una moneda unas veces resultará cara y otras cruz. Estos fenómenos, denominados aleatorios, se ven afectados por la incertidumbre.

En el lenguaje habitual, frases como "probablemente...", "es poco probable que...", "hay muchas posibilidades de que..." hacen referencia a esta incertidumbre.

La **teoría de la probabilidad** pretende ser una herramienta para modelizar y tratar con situaciones de este tipo. Por otra parte, cuando aplicamos las **técnicas** estadísticas a la recogida, análisis e interpretación de los datos, la teoría de la probabilidad proporciona una base para evaluar la fiabilidad de las conclusiones alcanzadas y las inferencias realizadas.

El objetivo del Cálculo de Probabilidades es el estudio de métodos de análisis del comportamiento de fenómenos aleatorios.

Aunque desde sus orígenes siempre han estado ligadas, es cierto que existe un cierto paralelismo entre la estadística descriptiva y el cálculo de probabilidades, como se puede apreciar en la siguiente tabla:

ESTADÍSTICA	PROBABILIDAD
f_i, F_i	Probabilidad
Variable Unidimensional	Variable aleatoria
Variable Bidimensional	Vectores aleatorios
Distribución de frecuencias	Distribución de Probabilidad (Función de distribución)
Medias, Momentos	Esperanza, Momentos
Independencia Estadística	Independencia Estocástica
Series Temporales	Procesos Estocásticos

5.2 CONCEPTOS BÁSICOS

En la actividad diaria nos encontramos con ciertos tipos de fenómenos que se pueden reproducir un gran número de veces, en condiciones similares dando lugar a un conjunto de dos o más posibles resultados. Estos fenómenos pueden ser de dos tipos: determinísticos y aleatorios.

Con ellos vamos a dar una serie de conceptos para poder desarrollar este tema y los sucesivos.

- **Fenómeno determinístico**.- Cuando al repetirlo bajo idénticas condiciones iniciales se obtienen siempre los mismos resultados.

- **Fenómeno aleatorio**.- Cuando al repetirlo bajo idénticas condiciones iniciales no se obtienen siempre los mismos resultados. Ejemplo: cuando lanzamos una moneda al aire observando la sucesión de caras y cruces que presentan.

- **Experimento aleatorio.-** Operación que repetimos bajo idénticas condiciones iniciales y no se obtienen siempre los mismos resultados. Ejemplo: lanzamiento de un dado observando la sucesión de números que se presentan {1, 2, 3, 4, 5,6}.

- **Suceso elemental**.- Cada uno de los resultados posibles del experimento aleatorio; luego un suceso elemental consta de un solo elemento del espacio muestral (**E**). En el ejemplo del dado: {1}.

- **Espacio muestral**.- Conjunto de todos los sucesos elementales del experimento aleatorio y lo designaremos como (**E**). Ejemplo del dado: {1,2,3,4,5,6}

- **Suceso**.- Conjunto formado por uno o más sucesos elementales, es decir, un subconjunto de resultados elementales del experimento aleatorio. Ejemplo del dado: nos interesa saber si el resultado a sido un número impar **A**={1, 3,5}.

- **Suceso seguro**.- Coincide con el suceso elemental, ya que al realizar el experimento aleatorio se obtendrá con seguridad uno de los posibles resultados o sucesos elementales, y por tanto ocurrirá (**E**).

- Dos **sucesos** se dice que son **iguales**, cuando todo suceso elemental de uno está en el otro, y viceversa.

- **Suceso imposible**.- Es el que no tiene ningún elemento del espacio muestral (**E**), y por tanto no ocurrirá nunca, y se representa como $\varnothing$. Ejemplo: En el lanzamiento del dado no puede darse el 7.

Telf: 93 611 17 82
WhatsApp: 671 227 146

- **Suceso complementario a un suceso *A*:** Es el suceso que se verifica si, como resultado del experimento aleatorio, no se verifica **A.** Se acostumbra a denotar con el símbolo **$\bar{A}$.**

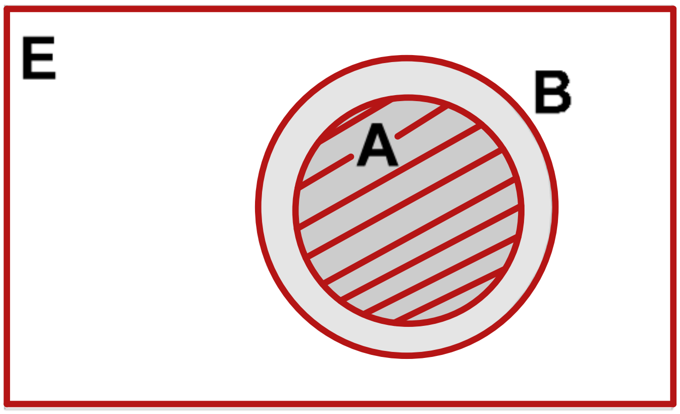
- **Sucesos incompatibles:** Los sucesos A y B son incompatibles o mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir simultáneamente.

$$A = \{a, b\}, B = \{d, e\}$$

5.3 OPERACIONES CON SUCESOS

Al ser los sucesos aleatorios nada más que subconjuntos de un conjunto ***E*** (espacio muestral), podemos aplicarles las conocidas operaciones con conjuntos, como son la unión, intersección y diferencia:

- **Suceso contenido en otro.-** Un suceso **A** se dice que está **contenido** o **inducido** en otro **B** si siempre que se verifica **A** se verifica **B**. Se representa $A \subset B$.



Ejemplo: Considerando el experimento aleatorio del lanzamiento de un dado, si designamos por:

A= que aparezca el 2 ó el 4 = $\{2,4\}$
B= que aparezca un número par: $\{2,4,6\}$

El suceso **$A \subset B$**, pues los resultados o sucesos elementales 2 y 4 de A, pertenecen a B. Diremos también que A **implica** a B y lo denotaremos **$A \Rightarrow B$.**

- **Igualdad de sucesos.-** Dados dos sucesos A y B, diremos que son **iguale**s, si siempre que ocurre el suceso A también ocurre el suceso B, y siempre que ocurre el suceso B ocurre el suceso A, y lo indicaremos por **A = B**. Es decir, si se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} A \subset B \\ B \subset A \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad \mathrm{A} = \mathrm{B}$$

Ejemplo: Sean los sucesos:

A = obtener un número par al lanzar un dado = $\{2,4,6\}$
B = obtener un múltiplo de 2 = $\{2\}$

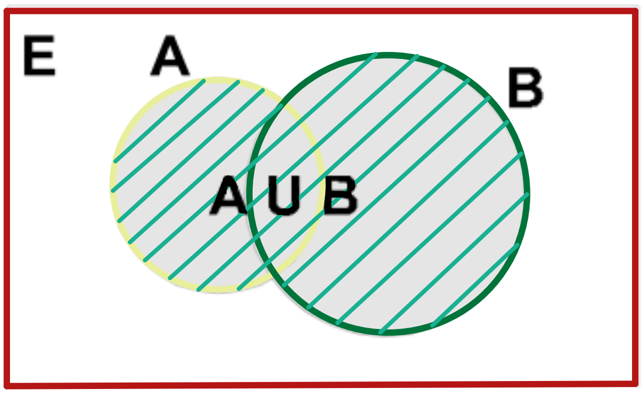
Aquí se verifica que:

A$\subset$B pues siempre que ocurre A ocurre B
B$\subset A$ pues siempre que ocurre B ocurre A

Luego A = B.

- **Diferencia de sucesos.-** Dados dos sucesos aleatorios $A, B \in E$, se llama ***suceso diferencia*** de ***A y B*** y se representa mediante ***A/B***, o bien, ***A-B*** al suceso aleatorio formado por todos los sucesos elementales que pertenecen a ***A***, pero no a ***B.***

- **Unión de sucesos.-** Dados dos sucesos A y B se llama **unión de A y B**, y se representa por A$\cup$B, al suceso que se realiza cuando se realiza alguno de ellos, A o B, es decir, a todos los elementos que están en A ó están en B.



Ejemplo: Sean los sucesos:

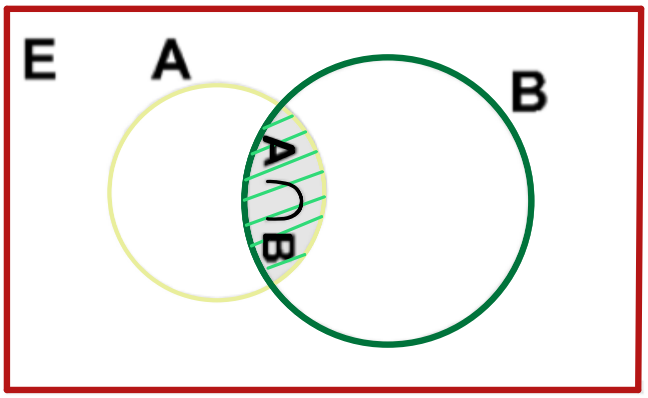
A = obtener el lanzamiento de un dado un número impar = $\{1,3,5\}$
B = obtener un número mayor que 4 = $\{5,6\}$

El suceso unión será:

$A \cup B = \{1,3,5\} \cup \{5,6\} = \{1,3,5,6\}$

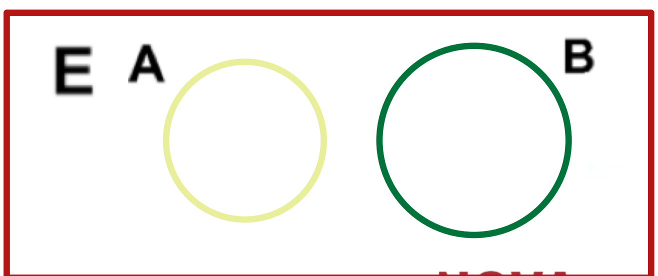
O sea, obtener un 1, un 3, un 5, ó un 6 en el lanzamiento del dado.

- **Intersección de sucesos.-** Dados dos sucesos A y B, se llama suceso **intersección de A y B**, y se representa por $A \cap B$, al suceso que se realiza si y sólo si se realizan simultáneamente A y B.

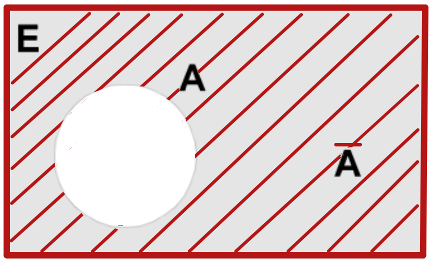


- **Sucesos Incompatibles.-** Dos sucesos A y B cuya intersección es el suceso imposible se llaman **sucesos incompatibles**. Obsérvese que un suceso y su contrario son siempre incompatibles.

$$A \cap B = \phi .$$



- **Sucesos Complementarios.-** Dado un suceso **A**, se llama **suceso contrario** o **complementario** de **A**, y se representa por **Ā**, al suceso que se realiza cuando no se realiza **A** y recíprocamente.



El suceso contrario de **E** es ϕ y recíprocamente.

Ā = E – A.

Ejemplo:

$$E = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$A = \{1,2\} \rightarrow \overline{A} = \{3,4,5,6\}$$
$$B = \{2,4,6\} \rightarrow \overline{B} = \{1,3,5\}$$
$$C = \{3,5\} \rightarrow C = \{1,2,4,6\}$$

RESUMEN OPERACIONES CON SUCESOS

Unión de sucesos	$A \cup B$	Es el suceso formado por todos los elementos de *A* y todos los elementos de *B* (suceso que se verifica cuando se realiza A ó B).
Intersección de sucesos	$A \cap B$	Es el suceso formado por todos los elementos que son, a la vez, de *A* y de *B* (suceso que se verifica cuando se realizan simultáneamente los sucesos A y B).
Diferencia	$A - B$	Es el suceso formado por todos los elementos de *A* que no son de *B* (suceso que se verifica cuando se verifica A y no se verifica B).
Suceso complementario o Suceso contrario	$\overline{A}$ $\overline{A} = E - A$	Dado un suceso A, denotaremos mediante $\overline{A}$ al suceso que se verifica cuando no se verifica A; por ende, se verifica que $A \cup \overline{A} = E$ y $A \cap \overline{A} = \Phi$
Sucesos incompatibles	$A \cap B = \emptyset$	Dos sucesos *A* y *B*, se llaman *incompatibles* cuando no tienen ningún elemento común.
Diferencia simétrica	$A \Delta B$	Dados dos sucesos A y B, denotaremos mediante $A \Delta B$ al suceso que se verifica cuando o bien se verifica A y no se verifica B, o bien se verifica B y no se verifica A.

Telf: 93 611 17 82
WhatsApp: 671 227 146

5.4 PROPIEDADES DE LA UNIÓN Y LA INTERSECCIÓN DE SUCESOS

Seguidamente se presentan una serie de propiedades que verifican tanto la unión como la intersección de dos o más sucesos. Tales propiedades son comunes a ambas, como se muestran en la siguiente tabla:

Propiedad	Unión	Intersección
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Simplificación	$A \cup (B \cap A) = A$	$A \cap (B \cup A) = A$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Elemento neutro	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap E = A$
Absorción	$A \cup E = E$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
Leyes de Morgan	El suceso contrario de la unión de dos sucesos es la intersección de sus sucesos contrarios: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	El suceso contrario de la intersección de dos sucesos es la unión de sus sucesos contrarios: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

De estas propiedades surgen las siguientes consecuencias inmediatas:

i) $A U \phi = A$, $A \cap \phi = \phi$
ii) $A \cap E = A$, $A U E = E$
iii) Leyes de **Morgan:** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \, U \, \overline{B}$, $\overline{A \, U \, B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. El complementario de la unión es la intersección de los complementarios
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. El complementario de la intersección es la unión de los complementarios

Ejemplo: Sea un experimento aleatorio de lanzar un dado y definimos:

A = {par}
B = {impar}
C = {múltiplo de 3}

Calcular:

$a)\quad A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\} = E$

$b)\quad A \cup C = \{1,3,4,6\}$

$c)\quad B \cup C = \{1,3,5,6\}$

$d)\quad \overline{A} \cup \overline{B} = \{1,2,3,4,5,6\} = E$

$e)\quad A \cap B = \emptyset$

$f)\quad A \cap C = \{6\}$

$g)\quad B \cap C = \{3\}$

$h)\quad B - C = B \cap \overline{C} = \{1,5\}$

$i)\quad (A \cup B) \cap C = \{3,6\}$

5.5 CONCEPTO DE PROBABILIDAD

Para definir la probabilidad vamos a dar varias definiciones o conceptos de probabilidad. Con estas definiciones se pretende expresar de manera objetiva y precisa el grado de ocurrencia de ciertos resultados de un fenómeno aleatorio.

Concepto Frecuentista.- Dado un suceso **A** que se repite un número de veces, si observamos la frecuencia con que se repite ese suceso, obtendremos las probabilidades asociadas asignando la frecuencia relativa a cada suceso.

Se llama **frecuencia absoluta** de un suceso **A** al número de veces que se verifica A al realizar el experimento un número determinado de veces.

Se llama **frecuencia relativa** de un suceso **A** al cociente entre su frecuencia absoluta y el número de veces que se realiza el experimento, que viene dada por:

$$f = \frac{n}{N}$$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{n}{N} = P(S)$$

Definición de Laplace.- La probabilidad de cualquier suceso **A** es igual al cociente entre el número de resultados favorables o resultados que integran el suceso **A** y el número total de elementos o posibles resultados del espacio muestral **E**.

$$P(A) = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de casos favorables}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de casos posibles}}$$

Como hemos venido observando los sucesos los consideremos como conjuntos, siendo válido para los sucesos todo lo estudiado en la teoría de conjuntos. Para llegar a la construcción axiomática del Cálculo de Probabilidades, necesitamos dar unas estructuras algebraicas básicas construidas sobre los sucesos de la misma manera que con construían sobre los conjuntos.

5.6 AXIOMÁTICA DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Todo fenómeno aleatorio lleva asociado un espacio muestral. Para medir el grado de ocurrencia de los sucesos, definimos el **Álgebra de Boole**, álgebra de sucesos o sigma álgebra, que verifica siguientes condiciones:

1.- El complementario de un suceso **A** que pertenece al Algebra también pertenece al algebra:

$$A \in \mathcal{A} \rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$$

2.- Si tenemos una serie de sucesos finitos ($A_1, A_2, \ldots A_n$) infinitos numerables, que pertenecen al $\mathcal{A}$, la unión de todos ellos tiene que pertenecer a $\mathcal{A}$.

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{A}.$$

3.- El suceso imposible también pertenece al $\mathcal{A}$,

$$\phi \in \mathcal{A}$$

Basándose en dicho álgebra, kolmogorov dio la definición axiomática de probabilidad que viene dada a continuación.

Se llama **probabilidad** asociada al *álgebra de Boole* a una aplicación $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{R}$ tal que, a cada valor de **A** le hace corresponder una probabilidad, que verifica los siguientes axiomas:

- **Axioma 1:** Siempre es positiva.

$$\mathcal{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1] \subset \mathbb{R}$$

$$A \subset E, A \in \mathcal{A} \longmapsto 0 \leq \mathcal{P}[A] \leq 1$$

- **Axioma 2:** Siempre estará entre 0 y 1.

$$P[E] = 1.$$

- **Axioma 3:** Sea $A_1 \ldots A_n$ sucesos tales que son disjuntos dos a dos (es decir, la intersección es Ø) $A_i \cap Aj = \phi$, la probabilidad es la suma de todas las probabilidades de sucesos.

$$P(\cup A_i) = \sum P(A_i).$$

Del tercer axioma se desprende que si que si $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ con $A_i \cap A_j = \phi$, entonces $P[A] = P[A_1] + P[A_2] + \cdots + P[A_n]$, es decir $P(\cup A_i) = \Sigma P(A_i)$.

AXIOMÁTICA DE KOLMOGOROV

El sistema axiomático de Kolmogorov consta de tres axiomas:

1. Si S es un elemento de la colección Ω existe un número $P(S) \geq 0$ denominado probabilidad del suceso S.

2. $P(E) = 1$.

3. Dada una sucesión numerable de sucesos $S_1, \ldots, S_n, \ldots$, disjuntos dos a dos, $S_i \cap S_j = \varnothing$, se verifica que $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(S_i)$.

La tripleta (E, Ω, P) se conoce como **espacio de probabilidad.**

Ejemplo: Sea un experimento aleatorio que consiste en lanzar al aire los dados que no están cargados, y se considera espacio muestral el resultado de la suma de los valores obtenidos, calcular:

1.- Espacio muestral: $E = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} =$ 11 elementos

2.- La probabilidad del suceso $A = \{2\}$ $\quad P(A) = \frac{1}{11}$

3.- La probabilidad del suceso $B = \{par\}$ $\quad P(B) = \frac{6}{11}$

4.- La probabilidad del suceso $C = \{10,11,12\}$ $\quad P(C) = \frac{3}{11}$

5.- La probabilidad del suceso $D = \{4,5,6,7\}$ $\quad P(D) = \frac{4}{11}$

6.- $P(A \cup B) = \{2,4,6,8,10,12\} = 6/11$

7.- $P(A \cup C) = \{2,10,11,12\} = 4/11$

8.- $P(\overline{D} \cup C) = \{2,3,8,9,10,11,12\} = 7/11$

9.- $P(\overline{B} \cup D) = \{3,4,5,6,7,9,11\} = 7/11$

10.- $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} = 10/11$

11.- $P(B \cup \overline{C}) = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} = 10/11$

12.- $P(B \cap D) = \{4,6\} = 2/11$.

5.7 TEOREMAS DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

TEOREMA 1. *La probabilidad del suceso imposible es cero:* $P(\varnothing) = 0$.

TEOREMA 2. *La probabilidad de la unión de n sucesos disjuntos,* $S_1, \dots, S_n$, *es igual a la suma de las probabilidades:*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(S_i).$$

TEOREMA 3. *La probabilidad de la unión de dos sucesos cualesquiera,* $P(S_1 \cup S_2)$, *es igual a* $P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2)$.

Para tres sucesos

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{3} S_i\right) = P(S_1) + P(S_2) + P(S_3) - \\ -P(S_1 \cap S_2) - P(S_1 \cap S_3) - P(S_2 \cap S_3) + \\ +P(S_1 \cap S_2 \cap S_3).$$

Para n sucesos

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(S_i) - \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} P(S_i \cap S_j) + \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n} P(S_i \cap S_j \cap S_k) + \\ + \cdots + (-1)^{n+1} P(S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n).$$

TEOREMA 4. *Si un suceso* S_1 *está contenido en otro* S ($S_1 \subset S$) *se verifica que* $P(S_1) \leq P(S)$.

TEOREMA 5. *La probabilidad de un suceso es menor o igual que la unidad:*

$$P(S) \leq 1.$$

TEOREMA 6. *La probabilidad del suceso complementario, S^*, de otro, S, es*

$$P(S^*) = 1 - P(S).$$

Telf: 93 611 17 82
WhatsApp: 671 227 146

5.8 PROBABILIDAD CONDICIONADA

Hasta ahora hemos visto el concepto de probabilidad partiendo de que la única información que tenemos sobre el experimento es el espacio muestral. Sin embargo, en ocasiones se conoce que un determinado suceso ha ocurrido. ¿Modificará esta información adicional la probabilidad de que ocurra otro suceso?. Veremos que generalmente sí. A partir de esta idea surge la idea de probabilidad condicionada, que se define:

Sea un espacio probabilístico y un suceso **B** perteneciente al *Algebra de Boole*, tal que $P(B) \neq 0$, entonces se define la probabilidad de que ocurra **A** si antes ha ocurrido **B**, como:

$$P(B/A)=\frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(A)}} \quad \text{si } P(B) \neq O.$$

Análogamente podemos definir **P(A/B)** como

$$P(A/B)=\frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P}(B)} \quad \text{si } P(A) \neq O.$$

De las definiciones anteriores se deducen claramente las relaciones siguientes:

- $P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B/A)$
- $P(A \cap B)=P(B) \cdot P(A/B)$
- $P(A/B).\ P(B)= P(B/A).\ P(A)$
- $\dfrac{P(A/B)}{P(B/A)}=\dfrac{P(A)}{P(B)}$
- $\boldsymbol{P(A/A)=1}$.

Telf: 93 611 17 82
WhatsApp: 671 227 146

- Si A, B son INCOMPATIBLES $P(A \cap B) = 0$, entonces: $\boldsymbol{P(A/B) = P(B/A) = 0}$.
- A esta expresión se le conoce como regla de la multiplicación, que en general para un número k de sucesos viene dada por:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2/A_1)\ldots P(A_k/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1})$$

Ejemplo: De una urna que contiene 9 bolas rojas y 5 negras, se extraen sucesivamente 2 bolas. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Que las dos sean negras
b) Que las dos sean rojas
c) Que la primera se roja y la segunda negra
d) Que la segunda se roja sabiendo que la primera fue negra

a) Sea N_1: Sacar la 1ª Negra
N_2: Sacar la 2ª Negra

$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2/N_1) = 5/14 \cdot 4/13$

b) Sea R1: Sacar la 1ª Roja
R_2: Sacar la 2ª Roja

$P(R_1 \cap R_2) = P(R1) \cdot P(R_2/R_1) = 9/14 \cdot 8/13$

c) Sea R_1: Sacar la 1ª Roja
N_2: Sacar la 2ª Negra

$P(R_1 \cap N_2) = P(R_1) \cdot P(N_2/R_1) = 9/14 \cdot 5/13$

d) Sea N_1: La 1ª es Negra
R_2: La 2ª es Roja

$P(R_2/N_1) = 9/13$ (quedan 13 bolas de las cuales 9 son rojas).

Ejemplo: Sabiendo que al lanzar un dado ha salido un número par, hallar la probabilidad que este número haya sido un dos:

5.9 TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

En primer lugar, antes de definir el teorema, es necesario definir que es un conjunto completo. Se dice que un conjunto de sucesos $A_1, A_2, ..., A_n \in E$ forman un sistema completo si verifica:

- Son incompatibles dos a dos, es decir $A_i \cap A_j \neq 0, \forall_{i,j}$
- Que la unión de todos ellos es el espacio muestral, es decir, $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$.

Con todo esto se define el teorema de la **Probabilidad Total** como:

Sea $A_1, A_2, ..., A_n$ un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea ***B*** un suceso para el que se conocen las probabilidades $P(B/A_i)$, entonces la probabilidad del suceso ***B*** viene dada por:

$$\mathbf{P(B)} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{n} \mathbf{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}.$$

Figura: *Si A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 forman un sistema completo, podemos calcular la probabilidad de B a partir de las cantidades $\boldsymbol{P[B \cap A_i]}$, o lo que es lo mismo, $P[B / A_i] \cdot P[A_i]$*

La demostración del teorema es fácil de hacer como demostramos.

Si A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5 forman un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos, podemos calcular la probabilidad de ***B*** a partir de las probabilidades de estos sucesos, es decir, a partir del suceso ***B*** se puede descomponer como:

$$B = B \cup E = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n),$$

que aplicando las propiedades de los sucesos es fácil ver que todo esto es igual a

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup \ldots \cup (B \cap A_n).$$

Calcular la probabilidad de B es lo mismo que calcular la probabilidad de la expresión anterior, es decir

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n),$$

ya que al ser un sistema completo, las intersecciones son vacías. Además, como sabemos que

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A / B) \cdot P(B),$$

entonces la probabilidad de se puede descomponer como

$$P(B) = P(B / A_1) \cdot P(A_1) + P(B / A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B / A_n) \cdot P(A_n) = \sum P(A_i) \cdot P(B / A_i).$$

Telf: 93 611 17 82
WhatsApp: 671 227 146

Ejemplo 1: Se tienen dos urnas, la nº1 tiene 3 bolas blancas y 2 negras, la nº2 tiene 2 bolas blancas y 3 negras. Se elige una urna al azar y de ella se extrae una bola. Calcular la probabilidad de que sea blanca.

Sea A_1: "elegir la urna nº1"
A_2: "elegir la urna nº2"
B: "extraer bola blanca"

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) = 1/2 \cdot 3/5 + 1/2 \cdot 2/5 = 1/2.$$

Ejercicio 2: Una compañía dedicada al transporte público explota tres líneas de una ciudad, de forma que el 60% de los autobuses cubre el servicio de la primero línea, el 30% cubre la segunda y el 10% cubre el servicio de la tercera línea. Se sabe que la probabilidad de que, diariamente, un autobús se averíe es del 2%, 4% y 1%, respectivamente, para cada línea. Determina la probabilidad de que, en un día, un autobús sufra una avería.

$$P(Av) = P(L_1) \cdot P(Av/L_1) + P(L_2) \cdot P(Av/L_2) + P(L_3) \cdot P(Av/L_3) =$$
$$= 0.6 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.04 + 0.1 \cdot 0.01 =$$
$$= 0.012 + 0.012 + 0.001 = 0.025$$

Telf: 93 611 17 82
WhatsApp: 671 227 146

Ejercicio 3: Una empresa del ramo de la alimentación elabora sus productos en cuatro factorías: F_1, F_2, F_3 y F_4. El porcentaje de producción total que se fabrica en cada factoría es del 40%, 30%, 20% y 10%, respectivamente, y además el porcentaje de envasado incorrecto en cada factoría es del 1%, 2%, 7% y 4%. Tomamos un producto de la empresa al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre defectuosamente envasado?

$$
\begin{aligned}
P(M) &= P(F_1) \cdot P(M/F_1) + P(F_2) \cdot P(M/F_2) + P(F_3) \cdot P(M/F_3) + P(F_4) \cdot P(M/F_4) = \\
&= 0.4 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.02 + 0.2 \cdot 0.07 + 0.1 \cdot 0.04 = \\
&= 0.004 + 0.006 + 0.014 + 0.004 = 0.028
\end{aligned}
$$

<u>Ejercicio 4</u>: Para realizar un experimento aleatorio, disponemos de una muestra de cinco concesionarios de coches, de los cuales dos concesionarios tienen 3 coches blancos y 5 azules, otros dos concesionarios tienes 2 coches blancos y 3 azules, y el último concesionario tiene 2 coches blancos y 1 azul. ¿Cuál es la probabilidad de elegir un coche azul?

P(azul)=P(A)*P(azul/A)+ P(B)*P(azul/B)+ P(C)*P(azul/C)

$$P(azul)=\left(\frac{2}{5}*\frac{5}{8}\right)+\left(\frac{2}{5}*\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}*\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{40}+\frac{6}{25}+\frac{1}{15}=0{,}25+0{,}24+0{,}06=0{,}55$$

5.10 TEOREMA DE BAYES

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos tal que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera para el que se conocen las probabilidades $P(B/A_i)$, entonces:

$$\mathbf{P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \bullet P(B / A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \bullet P(B / A_i)} = \frac{\mathit{P}(P(A_i) \bullet P(B / A_i))}{\mathit{P(B)}}, i = 1,2,\ldots,n}$$

Demostración :

$$P(A_i \cap B) = P(A_i) \cdot P(B/A_i) = P(B) \cdot P(A_i/B) \quad i=1,\ldots,n$$

despejando $P(A_i/B)$ nos queda:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \bullet P(B / A_i)}{P(B)} \qquad ,i = 1,\ldots,n$$

y por el teorema de la probabilidad total :

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \bullet P(B / A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \bullet P(B / A_i)} \qquad ,i = 1,\ldots,n$$

Ejercicio: Tenemos tres urnas: *A* con 3 bolas rojas y 5 negras, *B* con 2 bolas rojas y 1 negra y *C* con 2 bolas rojas y 3 negras. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola. Si la bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de haber sido extraída de la urna A?

La probabilidad pedida es *P(A/R)*. Utilizando el teorema de Bayes, tenemos:

$$P(A/R)=\frac{P(A)\cdot P(R/A)}{P(A)\cdot P(R/A)+P(B)\cdot P(R/B)+P(C)\cdot P(R/C)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}}=\frac{45}{173}=0.260$$

Telf: 93 611 17 82
WhatsApp: 671 227 146

5.11 INDEPENDENCIA DE SUCESOS

Sean **A** y **B** dos sucesos del espacio muestral. El suceso **A** se dice **independiente** del suceso **B** si el conocimiento de la ocurrencia de **B** no modifica la probabilidad de aparición de **A**, es decir, si

$$P\,(A/B) = P\,(A) \quad \text{o} \quad P(A) = P(A/B).$$

Propiedad: Si dos sucesos **A, B** son independientes, entonces siempre se verifica:

$$A \; y \; B \; independientes \iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

De la definición y de esta propiedad se deduce que si los sucesos A y B son independientes, se verifica:

- Los sucesos A y B son independientes.
- Los sucesos $\overline{A}$ y B son independientes
- Los sucesos $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes.
- Decimos que ***n*** sucesos son independientes si se verifica:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n) \; .$$

Ejemplo: Se consideran dos sucesos, A y B, asociados a un experimento aleatorio con $P(A)=0.7$; $P(B)=0.6$; $P(\overline{A} \cup \overline{B})=0.58$. ¿Son independientes A y B?

Ejemplo: Sea un experimento aleatorio que consiste en lanzar un tetraedro regular cuyas caras están numeradas del 1 al 4, y se definen los sucesos:

A = {1 ó 2}
B = {2 ó 3}
C = {2 ó 4}

Calcular:

$a)\ \ P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$b)\ \ P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$c)\ \ P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

d) Probabilidad de obtener un 2

$$P(2) = P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 1/4$$

¿Son independientes los sucesos A, B y C?

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B) = 1/2 * 1/2 = 1/4$$
$$P(A \cap C) = P(A) * P(C) = 1/2 * 1/2 = 1/4$$
$$P(B \cap C) = P(B) * P(C) = 1/2 * 1/2 = 1/4$$

Significa que A es independiente de B, que A es independiente de C, que B es independiente de C.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B) * P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(2) = 1/4$$
$$P(A) * P(B) * P(C) = 1/2 * 1/2 * 1/2 = 1/8$$
$$Luego,\ \ 1/4 \neq 1/8$$

No se cumple la anterior condición, por lo que A, B y C no son independientes entre sí, son independientes dos a dos.

<u>Ejemplo</u>: En una baraja de cartas hemos suprimido varias de ellas, entre los que quedan se verifican las siguientes probabilidades:

- Probabilidad de obtener un rey: 0,15
- Probabilidad de obtener una carta que sea bastos: 0,30
- Probabilidad de obtener una carta que no sea ni rey ni bastos: 0,6

Calcular:

- ¿Está entre ellas el rey de bastos?, caso afirmativo indicar su probabilidad.-
- ¿Cuántas cartas hay en la baraja?