ÍNDICE

BLOQUE 1: FUNDAMENTOS DE EQUILIBRIO FINANCIERO 2
Tema 1: Operaciones Financieras. Régimenes Financieros.. 2
Tema 2: Equilibrio en Operaciones Financieras de Financiación (O.F.F.) 3
Tema 3: Definición y Clasificación de los Régimenes Financieros 4
FORMULARIO DE RÉGIMENES FINANCIEROS.. 9
Tema 4: Valoración Financiera (Rentas).. 10
BLOQUE 2: OPERACIONES FINANCIERAS 15
TEMA 1: PRÉSTAMOS 15
TEMA 2: EMPRÉSTITOS 21

BLOQUE 1: FUNDAMENTOS DE EQUILIBRIO FINANCIERO

Tema 1: Operaciones Financieras. Régimenes Financieros.

1. Operación financiera, elementos y clasificación:
   Una operación financiera es un intercambio de disponibilidades monetarias entre dos sujetos económicos en diferentes momentos temporales.

   - Elementos:
   a) **Material**: ¿Qué se intercambia?
   Capital financiero: Cuantía disponible en un momento del tiempo (C,T)
   C: Cuantía € ($C \geq 0$)
   T: Años ($T \geq 0$)
   Ejemplo:
   (100, 0) -> 100€ en el momento inicial.
   (100, 1) -> 100€ al cabo de un año.
   (100, 0) (100, 2) -> 100€ en el momento inicial y 100€ en el año 2.

   b) **Personal**: ¿Quién hace el intercambio?
   Sujeto activo: Cede las disponibilidades monetarias y a cambio recibe un precio.
   Sujeto pasivo: Recibe las disponibilidades monetarias para llevar a cabo su proyecto de inversión o consumo.

   - En función del objetivo del sujeto pasivo diferenciamos:
   O.F. Financiación: El sujeto activo NO participa en el plan económico del sujeto pasivo. Solo recibe un precio que es conocido y con origen en el momento 0.
   O.F. Inversión: El sujeto pasivo SÍ participa en el plan económico del sujeto pasivo intentando obtener un rendimiento superior al de la O.F. Financiación.

   - En función del nº de capitales financieros de la O.F. Financiación diferenciamos:
   Simples:
   Sujeto activo entrega 1 capital financiero (C, T) -> Prestación
   Sujeto pasivo devuelve 1 capital financiero (C', T') -> Contraprestación

   Ejemplo:

   Parcialmente complejas:
   Sujeto activo entrega (1 o más) capitales financieros
   Sujeto pasivo entrega (1 o más) capitales financieros.
   Solo uno de los sujetos entrega más de un capital financiero.

   Ejemplo:

   Totalmente complejas:
   Tanto el sujeto activo como el pasivo entregan 2 o más capitales financieros.

   Ejemplo:

c) **Convencional**: ¿Cómo se hace el intercambio en la O.F. Financiación?

El conjunto de condiciones que regulan el equilibrio entre prestación y contraprestación en una O.F. Financiación se denomina Régimen Financiero (R.F.)

Tema 2: Equilibrio en Operaciones Financieras de Financiación (O.F.F.)

Los capitales financieros que componen prestación y contraprestación están en equilibrio ~ si se pueden intercambiar en el mercado financiero:

- **Condiciones de equilibrio:**

a) Reflexiva: (100, 0) ~ (100, 0) (C, T) ~ (C, T)

b) Simétrica: Si (100, 0) ~ (103, 1) = (103, 1) ~ (100, 1)
Si (C, T) ~ (C', T') = (C', T) ~ (C, T)

c) Transitiva: Si (100, 0) ~ (103, 1) ~ (107, 2) = (100, 0) ~ (107, 2)
Si (C, T) ~ (C', T') ~ (C'', T'') = (C, T) ~ (C'', T'')

d) Homogeneidad respecto cuantías: Si (100, 0) ~ (103, 1) = (300, 0) ~ (309, 1)
Si (C, T) ~ (C', T') = (k·C, T) ~ (k·C', T')

e) Preferencia por la liquidez: Si (C, T) ~ (C', T') entonces T' > T
C' > C

NOTA: "t" siempre en años! (t = T' – T)

Datos
- X años -> t = X
- X meses -> t = x/12
- X días -> t = X/360 ó x/365 ó ACT/360 ó ACT/365 ó ACT/ACT

ACT = días reales

<u>Ejercicio ejemplo 1:</u> Una empresa invierte hoy 3.500€ y prevé cobrar dentro de 2 años 3750€. Indicar prestación, contraprestación y equivalencia financiera.

<u>Ejercicio ejemplo 2:</u> Una empresa financiera presta hoy 800€ y prevé cobrar 250€ al final de cada uno de los próximos 4 meses. Indicar prestación, contraprestación y equivalencia financiera.

<u>Ejercicio ejemplo 3:</u> Una persona abrió hace 3 años una cuenta vivienda con 8.000€. Durante los 2 años siguientes ha ido realizando, al final de cada semestre, aportaciones constantes de 3.000€ y hoy retira el saldo acumulado en la cuenta por importe de 22.700€. Indicar prestación, contraprestación y equivalencia financiera

Tema 3: Definición y Clasificación de los Régimenes Financieros

Es el conjunto de pactos o acuerdos que rigen una O.F.F. en el mercado financiero. Estos acuerdos hacen referencia al precio, a la cuantía sobre la que se calcula dicho precio y al momento de pago. Es la expresión formal sobre cómo se realizará la O.F.F.

- **Clasificación:**

a) Régimenes financieros prácticos: Se caracterizan por usar expresiones sencillas pero que presentan algunas limitaciones que deben tenerse en cuenta en su aplicación práctica, para evitarlas suelen aplicarse en operaciones de plazo inferior o igual a 1 año ($t \leq 1$)

a1. R.F. Interés simple vencido -> Descuento matemático o racional.
a2. R.F. Descuento simple comercial -> R.F. Interés simple anticipado.

b) Régimenes financieros racionales: Éstos cumplen todas las propiedades que desde el punto de vista tecnológico se exige a la equivalencia financiera. Por este motivo se pueden aplicar en la práctica sin ningún tipo de limitación.

b1. R.F. Interés compuesto
b1. R.F. Descuento compuesto (No entran!)

b1. **Régimen Financiero de Interés Simple Vencido:**

Pactos y demostración (definición) de la expresión característica o formal:

a) *Y* se paga al final de la operación junto a la devolución de *C*

$C' = C + Y$ -> $C' = C + C \cdot i \cdot t$ -> $\mathbf{C' = C(1 + i \cdot t)}$

b) *Y* es proporcional a *C*, al término de la operación y se calcula en base al tanto nominal de interés *i*

$Y = C \cdot i \cdot t$ Donde $t = T' - T$ (término operación)
C' = Cuantía final C= Nominal Y= Precio o Interés Total

Precios:

a) Interés Total: (Precio total €)

$Y = C' - C = C \cdot i \cdot t$ Ejemplo: 102€ - 100€ = 2€

b) Interés unitario (Precio por €)

$I = (C' - C)/C = (C \cdot i \cdot t)/C = i \cdot t$ Ejemplo: 2/100 = 0'02 = 2%

c) Interés unitario y medio (Precio €/año)

$i = I/t = (i \cdot t)/t = i$ -> Tanto % de interés simple vencido

NOTA: Incumple la propiedad transitiva:

	$(1+i) \cdot (1+i)$		$1 + 2 \cdot i$
**			
0	2años	0	2años

Esto se produce porque el interés generado el primer año no genera interés los años/meses/días posteriores.

Ejercicio ejemplo 4: En la cuenta corriente de un banco, un cliente ha tenido la cantidad de 5.000€ durante 3 meses. Si esta cuenta ha liquidado los intereses en régimen financiero de interés simple vencido a un interés del 2% anual.

b2. **Régimenf Financiero de Descuento Comercial:**
Es un efecto comercial (letra, pagaré…) que tiene un importe a cobrar posteriorente. Nos pagan antes de dichos efectos comerciales con un descuento: Descuento = Anticipo del Nominal – Precio

Pactos y demostración (definición) de la expresión característica o formal:

C < C'   C' = Nominal

**   (C, T) ~ (C', T')

T   t = T' – T   T'

a) El precio de descuento total se paga al inicio y se resta al Nominal.

C = C' – D = C' – C'·d·t

b) El precio total de la operación, *D,* es proporcional a la cuantía C' final (Nominal) y al plazo de la operación (t = T' – T) mediante un tanto de proporcionalidad expresado en tanto por uno d > 0 (denominado tasa de descuento) *d*

C = C' – D = C' – C'·d·t **= C'(1 – d·t)**

NOTA: Las operaciones de Descuento Comercial son generalmente < 1 año
NOTA2: Incumple las propiedades Simétrica y Transitiva.

C   C'

T   T'

Precios:

a) Precio o Descuento Total (Cuantía total en €)

D = C' – C = C'·d·t

b) Descuento unitario (Precio por €)

D' = (C'-C)/C' = (C'·d·t/C') = d·t

c) Descuento unitario y medio (Precio €/año)

d = (d·t)/t = d -> Tanto % de Descuento Comercial.

Ejercicio ejemplo 5: Una empresa descuenta un régimen financiero de descuento comercial un ejecto de Nominal 4.200€ y vencimiento dentro de 3 meses. La entidad financiera lo descuenta a una tasa del 4,5% anual.
- Obtener el valor líquido o efectivo C que percibirá la empresa.

- Calcular los precios financieros de descuento: Total, Unitario y Unitario y medio.

NOTA: Para el cálculo del plazo *t*, en R.F. Descuento Comercial utilizaremos ACT/360 salvo que se diga lo contrario.

- **Relación entre Interés Simple y Descuento Comercial:**

Mientras que en el R.F. de interés simple vencido se paga el precio de la operación al final a un tanto de interés *i*, en el R.F. de descuento comercial se paga el precio de la operación al inicio a un tanto de descuento *d*

Vamos a encontrar la equivalencia entre ambos tantos:

R.F. de interés simple vencido: $C' = C(1+ i \cdot t)$

R.F. de descuento comercial: $C = C'(1\ d \cdot t)$

Sustituyendo la segunda expresión en la primera:

$C' = C'(1- d \cdot t)(1+ t \cdot t)$ -> $C'/C' = (1- d \cdot t)(1+ i \cdot t)$ -> $1 = (1- d \cdot t)(1+ i \cdot t)$ -> $1/(1- d \cdot t) = (1+ i \cdot t)$ ->

$i \cdot t = 1/(1-d \cdot t) – 1 = (d \cdot t)/(1- d \cdot t)$ -> $\mathbf{i} = (d \cdot t)/(1- d \cdot t) \cdot t$ $\mathbf{= d/(1- d \cdot t)}$ **ó** $\mathbf{d = i/(1+ i \cdot t)}$

**

<u>Ejercicio ejemplo 6:</u> Con los datos del ejercicio anterior, calcular el tipo de interés simple vencido equivalente.

Este tipo de interés también puede calcularse a partir del interés simple vencido:

- **Régimenes financieros de Interés Compuesto a tanto Constante:**

El nominal se capitaliza una o más veces durante el término de la operación. Los intereses generan más intereses.

<u>Pactos y demostración (definición) de la expresión formal:</u>

a) El precio o interés total se paga al final de la operación conjuntamente con la devolución de la cuantía inicial.

C	$C' = C + Y$	
T	T'	$t= T'- T$

b) El plazo de la operación se divide en periodos de capitalización y el precio se calcula en cada periodo aplicando una constante de proporcionalidad. El interés se calcula *m* veces cada año. Indicado por el tipo de interés *im* (tanto nominal anual)

m= 4 (trimestre) *m*= 1 (anual) *m*= 12 (mensual)

**	C	C_1	C_2	…	C'	m veces/año	$m \cdot t = n$
	T	T+1/m	T+2/m	…	$T' = T + n \cdot 1/m$ años	t años	

Diferimiento (T)

T+ 1/m

T+ 2/m

…

T'= T+ n·1/m

Cuantía (C)

$C_1 = C + C \cdot im \cdot 1/m = C(1 + im \cdot 1/m)$

$C_2 = C_1 + C_1 \cdot im \cdot 1/m = C(1 + im \cdot 1/m)^2$

…

$C_n = C' = C_{n-1}(1 + im \cdot 1/m) = C(1 + im \cdot 1/m)^n$

NOTA: m= 1/p -> frecuencia de capitalización

i% { Nominal / Anual } { Capitalizable / Acumulable / Pagadero / Liquidable / Con devengo / Periodificable } { Anualmente / Semestralmente / Trimestralmente / Mensualmente }

Precios: Asociados a un periodo (mes) im (i_{12})

**	C	$C' + C \cdot im \cdot 1/m = C(1 + im \cdot 1/m)$
	0	1

a) Precio total (Cuantía en €)

$Y = C(1 + im \cdot 1/m) - C = C \cdot im \cdot 1/m$

b) Precio Unitario (Precio por €)

$Im = (C \cdot im \cdot 1/m)/C = im \cdot 1/m = im/m$ -> Tanto interés efectivo

c) Precio Unitario y Medio (Precio por €/año)

$im = (im \cdot 1/m)/(1/m) = im$ -> tanto de interés nominal (anual)

Por tanto: $\mathbf{C_n} = C(1 + im \cdot 1/m)^{m \cdot t} = \mathbf{C(1 + Im)^{m \cdot t}}$

Cálculo de tantos de Interés efectivos equivalentes:

$Im \sim I'm'$ -> $(1 + Im)^m = (1 + I'm')^{m'}$ -> $\mathbf{I'm' = (1 + Im)^{m/m'} - 1}$

Ejercicio ejemplo 7: Obtener los tantos efectivos de la misma frecuencia y el I_1:

$i_{12} = 0{,}054$ -> $I_{12} =$ $\sim I_1 =$

$I_4 = 0{,}015$ -> $I_4 =$ $\sim I_1 =$

$i_2 = 0{,}058$ -> $I_2 =$ $\sim I_1 =$

0,25% Quincenal -> ~ I_1 =

6% anual capitalizable trimestralmente -> ~ I_1 =

1,2% trimestral -> ~ I_1 =

0,4% interés mensual -> ~ I_1 =

0,4% interés cuatrimestral -> ~ I_1 =

0,4% interés bimestral -> ~ I_1 =

0,4% interés bienal -> ~ I_1 =

0,4% interés bianual -> ~ I_1 =

Ejercicio ejemplo 8: Calcular el capital final que se obtendrá al invertir 12.000€ durante 5 años en una cuenta que rinde al 3% de interés nominal acumulable trimestralmente. Calcula también para el interés acumulable mensualmente y semestralmente.

FORMULARIO DE RÉGIMENES FINANCIEROS

I) R.F. interés simple vencido:

$C' = C(1 + i \cdot t)$

II) R.F. descuento comercial:

$C = C'(1 - d \cdot t)$

III) Tantos de interés simple vencido y descuento comercial equivalentes:

$i = d/(1 - d \cdot t)$ $\quad$ $d = i/(1 + i \cdot t)$

IV) Tanto efectivo de interés:

$Im = im/m$

V) R.F. Interés compuesto a tanto constante:

$C' = C(1 + im \cdot 1/m)^{m \cdot t}$ $\quad$ $n = m \cdot t$

VI) Tantos efectivos de interés equivalentes: $Im \sim I'm'$

$(1 + Im)^{m} = (1 + I'm')^{m'}$ -> $I'm' = (1 + Im)^{m/m'} - 1$

Tema 4: Valoración Financiera (Rentas)

- **Valor financiero de un conjunto de capitales:**

** $(C_r, T_r)_{r=1,2\ldots,n}$ ~ (V_r, T)

	C_1	C_2	C_r	…	C_n	
0	T_1	T_2	T_r	…	T_n	años

Valor en T en R.F. Interés Compuesto:

$VT= C_1(1+ Im)^{m(T-T1)} + C_2(1+ Im)^{m(T-T2)} +\ldots+Cr(1+ Im)^{m(T-Tr)} +\ldots+C_n(1+ Im)^{m(T-Tn)}= \sum C_r(1+ Im)^{m(T-Tr)}$

Casos particulares:

T= 0 -> V_0 = Valor actual
$V_0 = \sum C_r(1+ Im)^{-m\cdot Tr}$ ó $V_0 = \sum C_r(1+ Im)^{m(0-Tr)}$

T= n -> V_{tn} = Valor final
$V_{tn} = \sum C_r(1+ Im)^{m(Tn- Tr)}$

NOTA: Relación entre V_0 y V_{Tn} $\begin{cases} V_{Tn} = V_0(1+ Im)^{m\cdot Tn} \\ V_0 = V_{Tn}(1+ Im)^{-m\cdot Tn} \end{cases}$

- **Definición y Clasificación:**

Conjunto de capitales financieros que presentan una *periodicidad* en sus diferencias temporales (diferimientos)

**

	C_1	C_2	C_3	…	C_{r-1}	C_r	…	C_n
0	T_1	T_2	T_3	…	T_{r-1}	T_r	…	T_n

T_1+ 1/m

1/m T_{n-1} + 1/m

m: Frecuencia renta dentro de 1 año (nº de capitales que hay cada año)
n: Número total de Capitales -> Términos de la renta.

a) Según la periodicidad o frecuencia de la renta dentro de 1 año (*m*). Puede ser mensual, trimestral, semestral, etc.

b) Según la localización de la cuantía en el periodo. Puede ser *anticipada* o *vencida*.

c) Según el inicio de la renta. Puede ser *inmediata* o *diferida*.

d) Según el número de términos. Puede ser *temporal* o *perpetua*.

e) Según las cuantías (o términos). Puede ser *constante* o *variable*.

Ejercicio ejemplo 9: Calcular el valor actual (en el momento T0) de unos pagos a realizar por unas cuantías de 6.000€ dentro de 1 año, 3.500€ dentro de 2 años y de 8.000€ dentro de 5 años, si se valora a un 5% anual de interés.

Ejercicio ejemplo 10: Calcular el valor final (en el momento T5) del ejercicio anterior.

- Valoración de los diferentes tipos de rentas:

**		C_1	C_2	…	C_n	
	0	T_1	T_2	…	T_n	años
			$T_1 + 1/m$		$T_{n-1} + 1/m$	

**		C_1	C_2	…	C_n	
	0	1/m	2/m	…	n/m	años

n= periodos renta

- Valor actual de una Renta Inmediata / Vencida:

$V_0 = C_1(1+ Im)^{-1} + C_2(1+ Im)^{-2} + \dots + C_n(1+ Im)^{-n} = \sum C_r(1+ Im)^{-r}$

- Valor actual si la renta NO es Inmediata / Vencida:

$V_0 = \sum C_r(1+ Im)^{-r} \cdot (1+ Im)^{m[0- (T1- 1/m)]}$

** V_{T1-} 1/m Movemos capital a 0

- Valor en un diferimiento cualquiera:

$V_T = \sum C_r(1+ Im)^{-r} \cdot (1+ Im)^{m[T- (1+1/m)]}$

- Valor final de una Renta Inmediata / Vencida:

$V_n = \sum C_r(1+ Im)^{-r} \cdot (1+ Im)^{-n}$

- Valor final si la renta NO es Inmediata / vencida

$Vn = \sum C_r(1+ Im)^{-r} \cdot (1+ Im)^{n} \cdot (1+ Im)^{m[0- (T1- 1/m)]}$

** V_{t-1} – 1/m Capitalización compuesta Movemos a 0

- Rentas Financieras Constantes:
Dada una renta financiera con estructura temporal, diremos que es constante si todas las cuantías C_r son del mismo importe, es decir: $C_r = C$ (constante)

Demostración:

$V_0 = C(1+Im)^{-1} + C(1+Im)^{-2} + \ldots + C(1+Im)^{-n} = C[(1+Im)^{-1} + (1+Im)^{-2} + \ldots + (1+Im)^{-n}] =$

$= C\cdot[(1+Im)^{-1} – (1+Im)^{-n}\cdot(1+Im)^{-1} / (1-(1+Im)^{-1})] = C\cdot[(1-(1+Im)^{-1}) / ((1+Im)^{-1} -1) \rightarrow (1+Im)(1+Im)^{-1} = 1$

$a_n = a_{n-1} \cdot (1+Im)^{-1}$ $\quad$ $r = (1+Im)^{-1}$ $\quad$ $Suma = (a_1 – a_{n\cdot r}) / (1-r)$

$V_0 = C\cdot (1-(1+Im)^{-n}) / Im = C\cdot a_{n\ Im} = V_{T1} – 1/m$

Ejemplo:

$I_4 = 0{,}01$
$n = 60$ $\quad$ $(1-(1+0{,}01)^{-60}) / 0{,}01 = a_{60\ 0{,}01}$

Ejercicio ejemplo 11: Calcular el valor actual y final de una renta inmediata y vencida de 500€ mensuales durante 10 años a un interés del 6% anual capitalizable semestralmente.

Ejercicio ejemplo 12: Calcular el valor actual y final de una renta inmediata y vencida de 800€ trimestrales durante 15 años a un interés del 5% anual capitalizable bimestralmente.

- Valoración de la renta de periodo 1/m siendo perpetua, inmediata y vencida.

**
0 $\quad$ 1/m $\quad$ 2/m $\quad$ 3/m $\quad$ … $\quad$ r/m

Solo tiene sentido calcular el V_0 (valor actual) ya que no tiene un momento final.

$V_0 = \sum C_r (1+Im)^{-r} \rightarrow C/Im$

Ejercicio ejemplo 12+1: Calcular el valor actual de una renta inmediata, vencida y perpetua de 1.000€ semestrales a un interés del 8% anual capitalizable mensualmente.

- **Rentas Financieras Geométricas:**

Diremos que una renta es variable en progesión geométrica si cada cuantía C_r se obtiene multiplicando la cuantía anterior C_{r-1} por una constante positiva *q* denominada razón de la progresión.

$C_r = C_{r-1} \cdot q$ donde $q > 0$

Fórmula:

$C_r = C_1 \cdot q^{r-1}{}_{r=1,2\ldots,n}$ donde $q > 0$

Si $q > 1$ -> Renta geométrica creciente.
Si $0 < q < 1$ -> Renta geométrica decreciente.

Si $1+ Im \neq q$ -> $C_1 \cdot (1- q^n(1+ Im)^{-n}) / 1+ Im – q$
Si $1+ Im = q$ -> $C_1 \cdot n \cdot q^{-1} = C_1 \cdot n \cdot q^{-1} = C_1 \cdot n \cdot (1+ Im)^{-1}$

$V_n = V_0 (1+ Im)^n$

- **Rentas Financieras Aritméticas:**

Diremos que una renta es variable en progesión aritmética (o lineal) si cada cuantía C_r se obtiene sumando a la cuantía anterior C_{r-1} una constante *h* denominada razón de la progresión.

$C_r = C_{r-1} + h$

Fórmula:

$V_0 = (C_1 + h/Im + n\cdot h) \cdot a_{n\ Im} – (n\cdot h)/Im$

$V_n = V_0(1+ Im)^n$

Si $h > 0$ -> Renta aritmética creciente.
Si $h < 0$ -> Renta aritmética decreciente.

Ejercicio ejemplo 14: Dado el conjunto de capitales financieros $[(300 + 25(r-1) ; 3 + r/2)]_{r= 1,2,\ldots,16}$
Representar el esquema temporal y el eje:

Ejercicio ejemplo 15: Calcular el valor actual de una renta temporal de 5 años, inmediata, vencida y cuyo primer término es 5.000€ y aumenta un 1% mensual acumulativo en los 2 casos siguientes:

a) Interés del 10% anual

b) Interés del 12% anual capitalizable mensualmente.

Ejercicio ejemplo 16: Una pequeña empresa prevé, para los próximos 5 años, unos gastos trimestrales y vencidos que crecerán linealmente a razón de 350€ cada trimestre. Si para el primer trimestre los gastos ascienden a 6.000€, determinar el valor de los gastos, a día de hoy, para un tipo de interés del 4% anual pagadero trimestralmente.

BLOQUE 2: OPERACIONES FINANCIERAS

TEMA 1: PRÉSTAMOS

- Definición y Clasificación:

Es una operación financiera de financiación en la que el prestador (sujeto activo) entrega al prestatario (sujeto pasivo) un capital (nominal del préstamo). A cambio, el prestatario se compromete a devolver, en un único o varios pagos, la cuantía prestada más un interés

		Prestación (C; 0)	
**	PRESTADOR		PRESTATARIO
		Contraprestación (C_r; T_r) $_{r= 1,2,\ldots,n.}$	

**	Prestador	C= Nominal	C_1	C_2	…	C_n	cuotas
	Prestatario	0	T_1	T_2	…	T_n	años

a) <u>Préstamos de amortización única de capital (Devolución del Nominal, C, al final)</u>

- Con pago periódico de intereses:
  Prestación -> (C; 0) Contraprestación -> (C_r; $r\cdot 1/m$) $_{r= 1,2,\ldots,n}$

**	C	Y_1	Y_2	…	Y_n + C	Y= C·Im
	0	T_1	T_2	…	T_n	periodos

b) <u>Préstamos con amortización periódica de capital</u>

C	α_1	α_2	…	α_n	Cr = α_r
0	T_1	T_2	…	T_n	periodos

$\alpha_r = C_r + A_r$ $\sum A_r = C$

NOTA: Si α_r es CONSTANTE -> Préstamo francés

- Magnitudes de un préstamos: Reserva Matemática:

- Reserva matemática: R_r
- Valor: V_r (Im^v)
- Capital Pendiente: CP_r
- Total amortizado: M_r
- Tipo efectivo prestatario: Im* ($G_0 = G_1 + G_2$)
- Tipo efectivo prestador: Im^E ($G_0 = G_1$)
- TAE: I_1* ($G_0 = G_1$)
- Cuota Interés: Y_r $_{(r= 1,2,\ldots n)}$
- Término amortizativo: $\alpha_r = Y_r + A_r$ $_{(r= 1,2,\ldots,n)}$
- Cuota amortización: A_r $_{(r= 1,2,\ldots,n)}$

- **Reserva Matemática:**
Consideremos un préstamo cualquiera pactado a R.F. Interés compuesto (Im). Reserva matemática es la cuantía que cancela el préstamo en cada instante.

**	C	C_1	C_2	…	τ	C_n	
	0	T_1	T_2	…	Tτ	T_n	años

Sea τ un instante cualquiera del temino de la operación.

** $C(1+Im)^{\tau\cdot m} = \sum C_r(1+Im)^{m(\tau - Tr)}$

Nominal valorado en τ — Pagos (realizados y pendientes) valorados en τ

Posicionados en el instante τ existen 2 opciones:

1. Observamos lo que ha pasado HASTA τ:

   $C(1+Im)^{m\cdot\tau} > \sum C_r(1+Im)^{m\cdot(\tau - Tr)}$

   $R\tau_{retro} = C(1+Im)^{m\cdot\tau} - \sum C_r(1+Im)^{m(\tau - Tr)}$

2. Observamos lo que tiene que pasar a partir de τ (τ no incluido)

   $0 < \sum C_r(1+Im)^{m\cdot(\tau - Tr)}$

   $R\tau_{prosp} = \sum C_r(1+Im)^{m\cdot(\tau - Tr)}$ ó $R\tau_{prosp} = \sum C_r(1+Im)^{-m\cdot(Tr - \tau)}$

- **Demostración de que $R\tau_{retro} = R\tau_{prosp}$**

$R\tau_{retro} = C(1+Im)^{m\cdot\tau} - \sum C_r(1+Im)^{m(\tau - Tr)}$ $R\tau_{prosp} = \sum C_r(1+Im)^{m\cdot(\tau - Tr)}$

Igualamos las fórmulas:

$C(1+Im)^{m\cdot\tau} = \sum C_r(1+Im)^{m(\tau - Tr)}$ -> $C(1+Im)^{m\cdot\tau} = \sum C_r(1+Im)^{m(\tau - Tr)} + \sum C_r(1+Im)^{m(\tau - Tr)}$ ->

-> $C(1+Im)^{m\cdot\tau} - \sum C_r(1+Im)^{m(\tau - Tr)} = \sum C_r(1+Im)^{m(\tau - Tr)}$

- **Valor del préstamo para su refinanciación:**

$V\tau = \sum C_r(1+Im^v)^{m(\tau - Tr)}$

Si $Im^v > Im$ -> $V_\tau < R\tau$
Si $Im^v = Im$ -> $V_\tau = R\tau$
Si $Im^v < Im$ -> $V_\tau > R\tau$

Qué capital podría financiar en el instante τ con Im^v
Y pagando la misma cuota que hasta ahora.

- **Préstamo con amortización y pago de intereses único:**

- Ecuación de equilibrio inicial: Pago prestatario C'

**	C	C'	
	0	t	años

$C = C'(1+Im)^{-m\cdot t}$ ó $C' = C(1+Im)^{m\cdot t}$

- Cuota de interés y cuota de Capital:

$C' = A + Y$ $A = C$ $Y = C' - C$

- Reserva matemática: R_τ $\quad 0 \le \tau \le t \quad$ (τ en años)

  $R_0 = C \quad R_t = 0 \quad R_\tau = C(1+ Im)^{m \cdot \tau} = C'(1+ Im)^{-m \cdot \tau} \quad 0 < \tau < t$

- Capital pendiente: CP_τ $\quad 0 \le \tau \le t \quad$ (τ en años)

  $CP_0 = C = R_0 \quad CP_t = 0 \quad CP_\tau = C \quad 0 < \tau < t$

- Capital amortizado: $M_\tau = C - CP_\tau$ $\quad 0 \le \tau \le t \quad$ (τ en años)

  $M_\tau = 0 = M_0 \quad M_n = C \quad 0 < \tau < t$

- Valor del préstamo: Im^v

  $V_\tau = C'(1+ Im^v)^{-m \cdot (t - \tau)}$

- Tipo efectivo prestatario: Im^*

  $C = G_1 + G_2 + C'(1+ Im)^{m \cdot t}$ -> $Im^* = [(C - G_1 + G_2)/C']^{-1/m \cdot t} - 1$

- TAE: I_1^*

  $I_1^* = [(C - G_1)/C']^{-1/m \cdot t} - 1$

\- **Gráficamente:**

- Préstamo de términos amortizativos constantes (francés):

**	C	α	α	…	α	…	α	
	0	1	2	…	r	…	n	periodos

$C = \alpha \cdot a_{n\,Im}$ -> $\alpha = C/a_{n\,Im}$ $\alpha = A_r + Y_r$ $_{r=1,2\ldots,n}$

$Y_r = CP_{r-1} \cdot Im$ $A_r = \alpha - Y_r$

- Reserva matemática: R_τ

$R_0 = C$

$R_{r\,retro} = C(1+Im)^r - \alpha \cdot a_{r\,Im} \cdot (1+Im)^r$

$R_{r\,prosp} = \alpha \cdot a_{n-r\,Im}$ $_{r=1,2,\ldots n}$

$R_n = 0$

$R\tau = R_r\,(1+Im)^{\tau-r}$ $r < \tau < r+1$

**	C	α	α	…	α	α	…	α	
	0	T_1	T_2	…	T_r	T_{r+1}	…	n	periodos (m·t)

- Capital pendiente: CP_τ

$CP_0 = C = R_0$ $CP_r = R_r$ $CP\tau \neq R\tau$ $(r < \tau < r+1)$

$CP_n = 0 = R_n$

**	C	α	α	…	α	α	…	α
	0	T_1	T_2	…	T_r	T_{r+1}	…	n periodos

- Total amortizado $M\tau = C - CP\tau$

$M_0 = 0$ $M_r = C - CP_r = C - R_r$ $M_n = C$

- Descomposición del término amortizativo:

$\alpha = Y_r + A_r$ $Y_r = Im \cdot CP_{r-1} = Im \cdot R_{r-1}$ $A_r = A_1(1+Im)^{r-1}$ $_{r=1,2\ldots n}$

- Valor del préstamo: Im^v

$V_r = \alpha \cdot a_{n-r\,Im}{}^v$ $V\tau = \alpha \cdot a_{n-r\,Im}{}^v \cdot (1+Im)^{\tau-r}$ $r < \tau < r+1$

- Tipo efectivo prestatario: Im*

$C = G_1 + G_2 + \alpha \cdot a_{n\,Im^*}$

- TAE: I1*

$C = G_1 + \alpha \cdot a_{n\,I1^*}$

NOTA: La TAE (Tasa anual equivalente) es el tanto efectivo anual que hace equivalentes:

I) Nominal del préstamo que el prestamista entrega al prestatario.
II) Contraprestaciones + gastos de apertura (G_1) pagados por el prestatario.

- Demostración (Préstamo francés) de que las cuotas de amortización son crecientes en progesión geométrica a razón (1+ Im)

$\alpha = A_r + Y_r \qquad\qquad A_r = A_1(1+ Im)^{r-1}$

$A_r= \alpha - Y_r = \alpha - Im\cdot CP_{r-1} = \alpha - Im\cdot R_{r-1} = \alpha- Im\cdot \alpha\cdot a_{n-(r-1)\,Im} = \alpha- \cancel{Im}\cdot \alpha\cdot [(1- (1+Im)^{-[n-(r-1)]})/\cancel{Im}] =$

$= \cancel{\alpha}- \cancel{\alpha}+ \alpha(1+ Im)^{-[n-(r-1)]} = \alpha(1+ Im)^{-n} \cdot (1+ Im)^{r-1} = A_1\cdot (1+ Im)^{r-1}$

$A_1= \alpha- Y_1 = \alpha- Im\cdot C = \alpha- Im\cdot \alpha\cdot a_{n\,Im} = \alpha- \cancel{Im}\cdot \alpha\cdot [(1- (1+Im)^{-[n-(r-1)]})/\cancel{Im}] = \cancel{\alpha}- \cancel{\alpha}+ \alpha(1+ Im)^{-n} = \alpha\cdot(1+ Im)^{-n}$

- Préstamo francés con carencia:

<u>Carencia total:</u> Durante el periodo de carencia el prestatario no paga nada:

C			…	$C'= C(1+ Im)^d$	α	α	…	α	
0	T_1	T_2	…	T_d	T_{1+d}	T_{2+d}	…	T_{n+d}	periodos
	d periodos de carencia total					n términos de la operación			

Durante el periodo de carencia los intereses se van sumando al Nominal. Posteriormente, cuando comienza el pago de los términos amortizativos, el cálculo de la cuota se realiza sobre el nominal + intereses generados en el periodo de carencia.

<u>Carencia parcial:</u> Durante el periodo de carencia el prestatario abona las cuotas de interés:

C	C·Im	C·Im	…	C·Im	α	α	…	α
0	T_1	T_2	…	T_d	T_{1+d}	T_{2+d}	…	T_{n+d}
	d pagos de interés únicamente					n términos de la operación		

Durante el periodo de carencia se pagarán los intereses en cada periodo de capitalización según se vayan devengando C(1+ Im).

- Gráficamente:

- Préstamo de amortización única y pago periódico de intereses:

	C	Y	Y	…	Y	$C' = C + Y$		$Y = C \cdot Im$ $\quad_{r=1,2\ldots n}$
**	0	T_1	T_2	…	T_r	T_n	periodos	$C = A$

- Reserva matemática: R_τ $\quad 0 \leq \tau \leq n \quad$ (τ en periodos)

  $R_0 = C \quad R_r = C \quad R_n = 0 \quad R_\tau = C(1+Im)^{\tau-r} \quad r < \tau < r+1$

- Capital pendiente: CP_τ $\quad 0 \leq \tau \leq n \quad$ (τ en periodos)

  $CP_0 = C = R_0 \quad CP_r = C = R_r \quad CPn = 0 \quad CP_\tau = C \neq R_\tau \quad r < \tau < r+1$

- Capital amortizado: $M_\tau = C - CP_\tau$ $\quad 0 \leq \tau \leq n \quad$ (τ en periodos)

  $M_\tau = 0 = M_0 \quad M_n = C \quad 0 < \tau < n$

- Valor del préstamo: Im^v

  $V_r = C \cdot Im \cdot a_{n-r\, Im}{}^{v} + C(1+Im)^{-(n-r)}$

  $V_\tau = V_r \cdot (1+Im)^{\tau-r} \quad r < \tau < r+1$

- Tipo efectivo prestatario: Im^*

  $C = G_1 + G_2 + C \cdot Im \cdot a_{n\, Im^*} + C(1+Im)^{-n}$

- TAE: I_1^*

  $C = G_1 + C \cdot Im \cdot a_{n\, I1^*} + C(1+Im)^{-n}$

- Gráficamente:

TEMA 2: EMPRÉSTITOS

- Empréstito: Emisión de títulos de Renta Fija.

- Emisor: Sujeto pasivo
  - Estado (Deuda pública): Letras del tesoro, Bonos, Obligaciones.
  - Empresa (Deuda privada): Bonos, Obligaciones.

- Obligacionista: Persona física o jurídica que compra títulos.

- Suscriptor: Persona que compra el título el día de su emisión.

- Título / Bono / Valor / Obligación / Letra / Pagaré / Cédula / etc.
  Documento que el emisor entrega al suscriptor como reconocimiento de la deuda contraída. En la emisión todos los títulos tienen el mismo valor nominal C.

- Cupón: Es el importe que, en concepto de interés, debe pagar el emisor al obligacionista. Se puede expresar en € o en % de interés.

Por lo tanto, un empréstito es un préstamo en que la figura del sujeto activo está formada por un conjunto de prestamistas, denominados suscriptores y que en el caso del sujeto pasivo éste es un único prestatario que llamamos emisor.

- **Clasificación:**

I) Empréstitos de títulos de CUPÓN CERO:
   a. Títulos emitidos al descuento (rendimiento implícito)
      i. Letras del Tesoro (L.T.D.)
      ii. Pagarés de empresa.

   b. Títulos con rendimiento explícito.

II) Empréstitos de títulos con pago periódico de cupón.

- **Magnitudes de un Empréstito:**

- Nominal de un título: C

- Prima de emisión de un título: Pe

- Precio de emisión: Ce $\qquad$ $Ce = C \pm Pe$

$$\text{Si} \begin{cases} Ce > C & \text{emisión sobre la par.} \\ Ce = C & \text{emisión a la par.} \\ Ce < C & \text{emisión bajo la par.} \end{cases}$$

- Prima de amortización: Pa

- Precio de amortización: Ca $\qquad$ $Ca = C \pm Pa$

$$\text{Si} \begin{cases} Ca > C & \text{amortización sobre la par.} \\ Ca = C & \text{amortización a la par.} \\ Ca < C & \text{amortización bajo la par.} \end{cases}$$

- Fecha de emisión: T_0

- Fecha de amortización: T_n

- Total de títulos: N

- Nominal de todos los tñitulos: S — S= C·N
- Efectivo del empréstito: Se — Se= Ce·N
- Amortización del empréstito: Sa — Sa= Ca·N
- Tanto efectivo emisor: Im^E
- Tanto efectivo suscriptor: Im^s — Mantienen títulos hasta vencimiento y todos los suscriptores compran y amortizan igual
- Tipo de interés anual publicado: TIR
- Tanto efectivo obligacionista: Im^{ob} — Solo se tiene en cuenta desde el momento de compra
- Valor de un título en τ: V_τ — Precio del bono en τ

- Empréstitos de Cupón Cero:

Se amortiza de una sola vez a su vencimiento en T_n por su valor nominal C.
El Ce es menor que C -> Empréstitos emitidos al descuento.
La diferencia entre Ce y C permite determinar el rendimiento implícito que ofrece.

	Ce		C (Nominal)
**			
	0	t= T_n - 0	T_n

1) Letras del Tesoro: (L.D.T.)
   Emitido por el tesoro público
   Valor nominal C siempre es 1.000€
   El precio se obtiene mediante subasta
   El plazo suele ser inferior o igual a un año t= ACT/360

	P_0	C= Nominal	$P_0 < C$
**			
	0 Emisión	T_n años Amortización	

Rentabilidad obligacionista:

		$P_\tau + G_\tau$	C= 1000 (L.D.T.)	
**				
	0	τ (Compra)	T_n	años

En las Letras del tesoro *t* en días reales ACT (*d*). Siempre base 360 (si no se indica lo contrario).

Si *d* < 365 días es R.F. Interés simple -> $C= (P_\tau + G_\tau) \cdot (1+ I_1 \cdot d/360)$

Si *d* > 365 días es R.F. Interés compuesto -> $C= (P_\tau + G_\tau) \cdot (1+ I_1)^{d/360}$

En los Pagarés *t* en días reales ACT (*d*). Siempre base 365 (si no se indica lo contrario).

Si d < 365 días es R.F Interés simple -> $C= (P_\tau + G_\tau) \cdot (1+ I_1 \cdot d/365)$

Si *d* > 365 días es R.F Interés compuesto -> $C= (P_\tau + G_\tau) \cdot (1+ I_1)^{d/365}$

2) Cupón Cero con rendimiento explícito: Siempre en R.F. Interés compuesto

Emisión: Nominal + Prima emisión

Precio emisión: $Ce = C + Pe$ $\begin{cases} Ce > C \text{ -> Sobre la par.} \\ Ce = C \text{ -> A la par.} \\ Ce < C \text{ -> Bajo la par.} \end{cases}$

Amortización: $C + Y + Ca$

**	$C + Pe$	$C + Y + Pa$
	0	T_n

$C' = C(1 + Im)^n$ -> $Y = C(1 + Im^e)^n - C$

- Tipo efectivo suscriptor:

$C + Pe + G_0^s \cdot (1 + Im^s)^n = C' + Pa$ -> $Im^s = [(C' + Pa)/(C + Pe + G_0^s)]^{1/n} - 1$

- Tipo efectivo obligacionista:

$(P_r + G_r^{ob}) \cdot (1 + Im^{ob})^{n-r} = C' + Pa$ -> $Im^{ob} = [(C' + Pa)/(P_r + G_r^{ob})]^{1/(n-r)} - 1$

- Tipo efectivo emisor:

$N \cdot Ce = G_0^E + N \cdot C' \cdot (1 + Im^E)^{-n}$ -> $Im^E = [(N \cdot Ce - G_0^E)/(N \cdot C')]^{-1/n} - 1$

- Valor financiero del título: Im^v

$V_r = C'(1 + Im^v)^{-(n-r)}$ $C' = C(1 + Im^e)^n$

- **Empréstitos de cupón periódico:**

**	$C + Pe + Gs$	$C \cdot Im^e$	$C \cdot Im^e$	…	$C \cdot Im^e$	…	$C \cdot Im^e + C + Pa$
	0	T_1	T_2	…	T_r	…	T_n

El cupón ($C \cdot Im^e$) se calcula aplicando el tipo de interés pactado en la emisión sobre el NOMINAL.

- Tipo efectivo suscriptor:

$C + Pe + G_0^s = C \cdot Im^e \cdot a_{n\, Im^s} + (C + Pa) \cdot (1 + Im^s)^{-n}$

- Tipo efectivo obligacionista:

$P_r + G_r^{ob} = (C \cdot Im^e) \cdot a_{n-r\, Im^{ob}} + (C + Pa) \cdot (1 + Im^{ob})^{-(n-r)}$

- Tipo efectivo obligacionista en τ:

$P_\tau + G_\tau^{ob} = (C \cdot Im^e) \cdot a_{n-r\, Im^{ob}} \cdot (1 + Im^{ob})^{\tau - r} + (C + Pa) \cdot (1 + Im^{ob})^{-(n-\tau)}$ $r < \tau < r+1$

$P_{ex\text{-}cupón}$ + Cupón Corrido = $P_{ex\text{-}cupón} + C \cdot Im^e \cdot$ (días entre r y τ)/(días entre r y r+1)

- Rentabilidad asociada a un título comprado en emisión y vendido al final del periodo *r*

$C + Pe + G_0^{ob} = C \cdot Im^e \cdot a_{r\, Im^{ob}} + P_r(1 + Im^{ob})^{-r}$

- Tipo efectivo emisor:

$N \cdot (C + Pe) = G_0^E + N \cdot C \cdot Im^e \cdot a_{n\, Im^E} + N \cdot (C + Pa) \cdot (1 + Im^E)^{-n}$

- Valor financiero de un título: Im^v

$V_r = C \cdot Im^e \cdot a_{n-r\ Im^v} + (C + Pa) \cdot (1 + Im^v)^{-(n-r)}$

	$Im^v > Im^e$	->	$Vr < C$
Si	$Im^v = Im^e$	->	$Vr = C$
	$Im^v < Im^e$	->	$Vr > C$